POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

1506

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM X • ROCZNIK 1961

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1961

ADRES REDAKCJI

Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika

Zakład Radiotechniki, tel. 8.32.04 lub 8.87.40

Redakcja czynna: poniedziałki, środy i piątki godz. 17—19

SPIS TREŚCI

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

CONTENTS-SOMMAIRE

Page

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM X · ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1961

A R C H I W U M   E L E K T R O T E C H N I K I

TOM X   ZESZYT 1   1961

SPIS TREŚCI

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS — SOMMAIRE

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM X • ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1961

PRINTED IN POLAND

ADRES REDAKCJI:

Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika,
Zakład Radiotechniki, tel. 8.32.04 lub 8.87.40
Redakcja czynna: poniedziałki, środy i piątki

Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Dział Czasopism
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 760+140 egz.	Do składania 16 I 1961
Ark. wyd. 18,0 druk. 18,5	Podpisano do druku 22 IV 1961
Papier ilustrac. 70 g V kl. 70×100/16	Druk ukończ. w kwietniu 1961
Cena zł 30,—	E-5 Zamówienie 38/48

Drukarnia Uniwersytetu im. A. Mickiewicza — Poznań, ul. Fredry 10

621.3.011.4.

B. KONORSKI

Kapazitäten im System zweier geladener Kugeln

Das einfachste geometrische System von endlichen Elektroden ist das System zweier exzentrisch gegeneinander gelegenen Kugeln. Gegenstand dieser Arbeit ist das elektrostatische Feld zweier solcher geladenen Kugeln, insbesondere die physikalischen Teilkapazitäten, die in diesem System vorhanden sind. Wie in [7] und [11] gezeigt wurde, hängen die Kapazitäten in einem solchen System eindeutig nicht nur von den geometrischen Parametern, sondern auch von den Ladungen und Potentialen beider Kugeln ab (oder genauer, wie wir unten sehen werden: von den Verhältnissen der Ladungen und der Potentiale).

Ein Merkmal, das die erwähnten Felder noch besser kennzeichnet, ist die Lage des Gleichgewichtspunktes, die als Grundlage der Klassifizierung dieser Felder angenommen werden kann. Es ergeben sich dabei 5 verschiedene Zonen; in jeder derselben hat das Feld eine andere Struktur.

Obgleich das besprochene System geometrisch so einfach ist, müssen wir, um für die Flüsse geschlossene Ausdrücke zu erhalten, zur Näherungsrechnung greifen und uns auf den Fall beschränken, in welchem der Abstand zwischen den Kugeln nicht kleiner als der Radius der kleineren Kugel ist. Wir erhalten dann 5 Gruppen von Ausdrücken (je eine Gruppe für jede der 5 Zonen); jede Gruppe besteht aus 3 Ausdrücken für K_{11}, K_{12} und K_{22}.

1. EINLEITUNG

Das Problem der Kapazitäten im System zweier Kugeln wurde bereits in den Arbeiten [2] und [3] erwähnt, wo dafür sogar einige Formeln (Gleichungen (102) bis (106) in [2], Gleichungen (23) bis (25) in [3]) angegeben wurden. Jedoch konnte dieses Problem in den erwähnten Arbeiten nur als eine Nebensache behandelt werden, da das Hauptthema anderswo lag. Wie sich hier zeigen wird, gelten die genannten Formeln nur für einen Teil des bestehenden Möglichkeitsbereiches.

In einigen 1955—1960 veröffentlichten Aufsätzen versuchte der Autor die Ansicht zu begründen, daß die bisher sowohl in der Theorie als auch in der Praxis benützten Teilkapazitäten (die wir hier Maxwellsche Kapazitäten C_{ij} nennen werden) nur ein Spezialfall der sogenannten „physikalischen Kapazitäten" K_{ij} seien [1]. Diesem Thema sind u.a. auch die

[1] In den Aufsätzen [2], [3], [10] sind beide Größen mit C_{ij} bezeichnet.

Arbeiten [7], [11] gewidmet, die den neuen Begriff theoretisch begründen. Diesen zufolge hängen die physikalischen Teilkapazitäten im elektrostatischen Feld nicht nur von den geometrischen Parametern des Systems, sondern auch von seinem elektrischen Zustand ab, d.h. von den Potentialen und Ladungen; zum Unterschied davon hängen die „Maxwellschen" Kapazitäten nur von den geometrischen Maßen des Systems ab.

Auf die theoretische Begründung dieser neuen Begriffe folgt deren Anwendung in konkreten Systemen und die Darstellung von Methoden, mit deren Hilfe man physikalische Teilkapazitäten wirklich berechnen kann. Die erste derartige Anwendung ist im Aufsatz [8] beschrieben; dort werden die Teilkapazitäten einer geradlinigen Doppelleitung berechnet. Da diese Leitung als unendlich lang angenommen wird, haben wir dabei mit ebenen Feldern zu tun, was das Problem vereinfacht.

Die vorliegende Arbeit behandelt zum ersten Mal die Berechnung der Kapazitäten in einem endlichen Elektrodensystem; das einfachste System dieser Art ist das System zweier Kugeln; es kann auch als erste Näherung eines endlichen Systems von Elektroden beliebiger Gestalt betrachtet werden.

2. GRUNDLEGENDE FORMELN

Denken wir uns 2 Metallkugeln K, K' mit den Halbmessern r, r', deren Mittelpunktsentfernung D beträgt. Die Potentiale der Kugeln bezeichnen wir mit V, V', ihre Ladungen („Gesamtladungen") mit H, H'. Die Ladungen Q, q', welche durch die Beziehungen

$$Q = 4\,\pi\varepsilon_0 r V\,; \qquad q' = 4\,\pi\varepsilon_0 r' V' \tag{1}$$

definiert sind, nennen wir Hauptladungen.

Es ist bekannt, daß das elektrostatische Feld im Raum außerhalb dieser Kugeln und ein durch zwei Folgen von Punktladungen C_1) und D_1) erzeugtes Feld gleichwertig sind.

$$C_1)\ Q\,, -Q_1'\,, Q_1\,, -Q_2'\,, Q_2\,, -Q_3' \ldots \qquad D_1)\ q'\,, -q_1\,, q_1'\,, -q_2\,, q_2'\,, -q_3 \ldots$$

(Bild 1a); dabei sind die Ladungen C_1) innerhalb der (leeren) sphärischen Fläche K in den Punkten $Q, B_1', B_1, B_2' \ldots$ auf der Geraden OO' gelegen; die Entfernungen dieser Punkte vom Mittelpunkt O der Kugel K sind

$$C_2)\ 0\,, \beta_1'\,, \beta_1\,, \beta_2'\,, \beta_2\,, \beta_3' \ldots$$

Aehnlich sind die Ladungen D_1) innerhalb der Sphäre K' in den Punkten Q', A_1, A_1', $A_2, \ldots$ auf der Geraden OO' gelegen; die Entfernungen dieser Punkte vom Mittelpunkt O' der Kugel K' sind

$$D_2)\ 0\,, \alpha_1\,, \alpha_1'\,, \alpha_2\,, \alpha_2'\,, \alpha_3 \ldots$$

Ebenso wie in [4] und [5] ersetzen wir im Fall $D \geqslant 2r + r'$ (wo $r < r'$) die

unendlichen Folgen C_1), D_1) durch die Folgen C'_1), D'_1), von deren jede aus 5 Punktladungen besteht (Bild 1b):

$$C'_1)\ Q, -Q'_1, Q_1, -Q'_{2z}, Q_{2z}; \qquad D'_1)\ q', -q_1, q'_1, -q_{2z}, q'_{2z}$$

und nehmen an, daß diese Ladungen in den Punkten O, B'_1, B_1, B'_2, B_2, O', A_1, A'_1, A_2, A'_2 gelegen sind, deren Entfernungen von den Punkten O, O'

$$C'_2)\ 0, \beta'_1, \beta_1, \beta'_2\ \beta_2; \qquad D'_2)\ 0, \alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2$$

betragen.

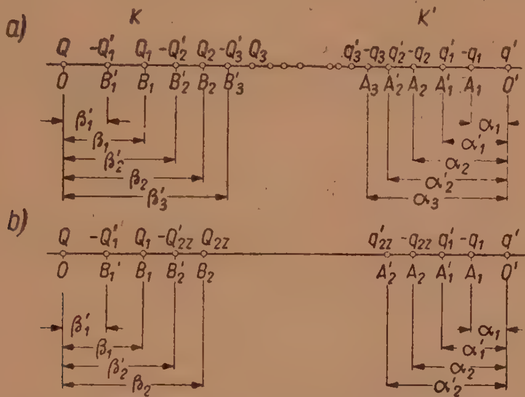


Bild 1. Verteilung der Punktladungen innerhalb der Kugelflächen K, K': a) theoretische Verteilung; b) Ersatzverteilung.

Die Begründung dieses Vorgehens und die Abschätzung des hierbei begangenen Fehlers sind in [4] enthalten. Das Beispiel 1 zeigt die Richtigkeit dieser Begründung an einem Einzelfall. In diesem Beispiel werden in einem bestimmten System je 9 Glieder der Folgen C_1), D_1), C_2), D_2) berechnet. Es wurden dabei folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\varrho = \frac{r}{D}; \qquad \varrho' = \frac{r'}{D}; \tag{2}$$

$$k = \frac{D^2 - r^2 - r'^2}{rr'}; \qquad p = \frac{rr'}{D^2 - r'^2}; \qquad p' = \frac{rr'}{D^2 - r^2}; \tag{3}$$

$$s = \frac{1}{kp}; \qquad s' = \frac{1}{kp'}. \tag{4}$$

Auf Grund der Rekurrenzformeln (28) in [2] ist

$$\alpha_n = \frac{r'^2}{D - \beta_{n-1}}; \qquad \beta_n = \frac{r^2}{D - \alpha_n}; \qquad \alpha'_n = \frac{r'^2}{D - \beta'_n}; \qquad \beta'_n = \frac{r^2}{D - \alpha'_{n-1}} \tag{5}$$

$$q_n = Q_{n-1}\frac{\alpha_n}{r'}; \qquad Q_n = q_n\frac{\beta_n}{r}; \qquad q'_n = Q'_n\frac{\alpha'_n}{r'}; \qquad Q'_n = q'_{n-1}\frac{\beta'_n}{r}, \tag{6}$$

wobei

$$n=1, 2, 3\ldots; \quad \beta_0=\alpha_0'=0; \quad Q_0=Q; \quad q_0'=q'.$$

Hieraus erhalten wir die Ausdrücke

$$\frac{\beta_1'}{r}=\varrho; \quad \frac{\beta_1}{r}=\frac{p}{\varrho'}; \quad \frac{\beta_2'}{r}=\varrho s'; \quad \frac{\beta_2}{r}=\frac{\varrho}{1-s\varrho'^2}; \tag{7}$$

$$\frac{\alpha_1}{r'}=\varrho'; \quad \frac{\alpha_1'}{r'}=\frac{p'}{\varrho}; \quad \frac{\alpha_2}{r'}=\varrho' s; \quad \frac{\alpha_2'}{r'}=\frac{\varrho'}{1-s'\varrho^2} \text{ usf.} \tag{8}$$

Aus den Zahlen im Beispiel 1 ersehen wir, daß bei der Annahme $\beta_{m_1}\approx\approx\beta'_{m_2}$ und $\alpha_{m_1}\approx\alpha'_{m_2}$ (wobei m_1 und m_2 beliebige Zahlen der Folge 2, 3, 4 ... sind) der dabei begangene relative Fehler in C_2) kleiner als 0,06% in D_2) — kleiner als 0,04% ist.

B e i s p i e l 1. Es wird angenommen $r=2$, $r'=5$, $D=10$. Aus (5) ÷ (8) erhalten wir:

C_1) Q; $-0{,}2\,q'$; $0{,}1333\,Q$; $-0{,}0282\,q'$; $0{,}0191\,Q$; $-0{,}00405\,q'$; $0{,}00275\,Q$; $-0{,}00058\,q'$; $0{,}00040\,Q\ldots$

D_1) q'; $-0{,}5\,Q$; $0{,}1042\,q'$; $-0{,}0704\,Q$; $0{,}0149\,q'$; $-0{,}01012\,Q$; $0{,}00214\,q'$; $-0{,}00145\,Q$; $0{,}00031\,q'\ldots$

C_2) 0; 0,4; 0,5333; 0,5408; 0,5435; 0,54370; 0,54375; 0,54376; 0,54376 ...

D_2) 0; 2,5; 2,6042; 2,6408; 2,6429; 2,6437; 2,64373; 2,64375; 2,64375; ...

Wir berechnen noch die Verhältnisse der Einzelladungen:

$$\frac{q_3}{q_2}=0{,}1437; \quad \frac{q_4}{q_3}=0{,}1437_5; \quad \frac{Q_3}{Q_2}=0{,}1437_5; \quad \frac{Q_4}{Q_3}=0{,}1437_5;$$

$$\frac{Q_3'}{Q_2'}=0{,}1437; \quad \frac{Q_4'}{Q_3'}=0{,}1437_5; \quad \frac{q_3'}{q_2'}=0{,}1437_5; \quad \frac{q_4'}{q_3'}=0{,}1437_5.$$

Daraus folgt in diesem konkreten Fall die Richtigkeit der Ansätze (56), (57) in [2] und (8) in [3].

Gemäß [4] und [5] haben die 10 Ersatzladungen (Bild 1b), die außerhalb von K, K' das gleiche Feld erzeugen, folgende Werte:

$$Q_1'=q'\varrho; \quad Q_1=Qp; \quad Q_{2z}'=q'm\varrho; \quad Q_{2z}=Qn; \tag{9}$$

$$q_1=Q\varrho'; \quad q_1'=q'p'; \quad q_{2z}=Qm\varrho'; \quad q_{2z}'=q'n', \tag{10}$$

wobei

$$m=\frac{1}{k}+\frac{R+1}{2(k^2-1)}; \quad R=\sqrt{\frac{D^2-(r'-r)^2}{D^2-(r'+r)^2}}; \tag{11}$$

$$n=\frac{p}{k-p}\cdot\frac{R+1}{2}; \quad n'=\frac{p'}{k-p'}\cdot\frac{R+1}{2}. \tag{12}$$

Eine Summierung der Reihen C$_1$) D$_1$) ergibt

$$H=SQ-T'q'; \quad H'=S'q'-TQ, \tag{13}$$

wobei

$$rT=r'T'=b, \tag{14}$$

siehe (95), (96), (79), (152) in [2] und (18), (19) in [3]. S, T, S', T' sind Funktionen der geometrischen Parameter.

Wenn wir die unendlichen Folgen C$_1$), D$_1$), durch die fünfgliedrigen Folgen C$'_1$), D$'_1$) ersetzen, so erhalten wir die angenäherten Gleichungen

$$\begin{aligned} H&=Q-Q'_1+Q_1-Q'_{2z}+Q_{2z}=Q(1+p+n)-q'\varrho(m+1);\\ H'&=q'-q_1+q'_1-q_{2z}+q'_{2z}=q'(1+p'+n')-Q\varrho'(m+1). \end{aligned} \tag{a}$$

Hieraus folgen die angenäherten Ausdrücke

$$S=1+p+n; \quad S'=1+p'+n'; \tag{15}$$

$$T=\varrho'(m+1); \quad T'=\varrho(m+1). \tag{16}$$

Die Zahlenwerte dieser Funktionen für verschiedene Werte der Argumente ϱ, ϱ' sind in den Zahlentafeln 2 und 3 in [3] enthalten.

3. FLÜSSE, DIE VON DEN KUGELFLÄCHEN AUSGEHEN

Wie bereits erwähnt, hängen die physikalischen Teilkapazitäten K_{11} K_{12}, K_{22} vom augenblicklichen elektrischen Zustand des Systems ab und deshalb ist zu ihrer Bestimmung die Berechnung der Flüsse notwendig, die von den Flächen K, K' ausgehen, bezw. in dieselben münden. In [4], [5] haben wir uns mit der Berechnung der Flüsse ψ, ψ' beschäftigt, die von den Ladungsfolgen C$'_1$) und D$'_1$) gemeinsam erzeugt werden und die Kugelzonen PO_1P bezw. $P'O'_1P'$ der Kugeln K, K' durchsetzen (Bild 2). Die ebenen Zentralwinkel dieser Zonen bezeichnen wir mit 2ϑ und $2\vartheta'$: $\vartheta=\sphericalangle POO_1$, $\vartheta'=\sphericalangle P'O'O'_1$.

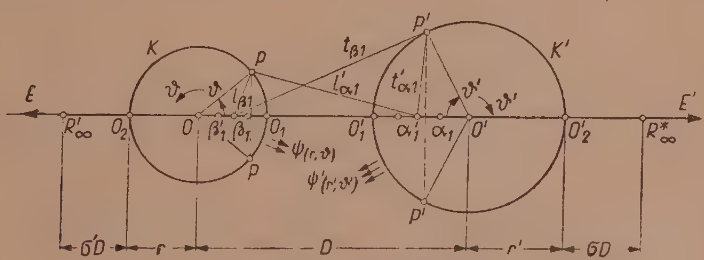


Bild 2. Bezeichnungen.

Wir bezeichnen die Entfernung

der Punktladungen	Q	Q'_i	Q_i	q'	q_i	q'_i	$(i=1,2)$
von Punkt P mit	l_0	$l'_{\beta i}$	$l_{\beta i}$	l'_0	$l_{\alpha i}$	$l'_{\alpha i}$	
von Punkt P' mit	t_0	$t'_{\beta i}$	$t_{\beta i}$	t'_0	$t_{\alpha i}$	$t'_{\alpha i}$	

Es ist hier also z. B.

$$l_0' = \sqrt{r^2 - 2\,Dr\cos\vartheta + D^2}\,; \qquad t_0 = \sqrt{r'^2 - 2\,Dr'\cos\vartheta' + D^2}\,; \tag{17}$$

$$l_{\beta 2}' = \sqrt{r^2 - 2\,\beta_2' r\cos\vartheta + (\beta_2')^2}\,; \qquad l_{\alpha 1} = \sqrt{r^2 - 2\,(D-\alpha_1)\,r\cos\vartheta + (D-\alpha_1)^2}\,; \tag{18}$$

$$t_{\beta 1} = \sqrt{r'^2 - 2\,(D-\beta_1)\,r'\cos\vartheta' + (D-\beta_1)^2}\,; \qquad t_{\alpha 2}' = \sqrt{r'^2 - 2r'\alpha_2'\cos\vartheta' + (\alpha_2')^2}\,. \tag{19}$$

Gemäß der Gleichung (30) in [4] finden wir den Ausdruck für den Fluß $\psi(r,\vartheta)$, der die Zone POP der Kugel K durchsetzt:

$$\begin{aligned}\psi(r,\vartheta) = {} & \frac{1}{2}Q\left(-\frac{r'}{D}\cdot\frac{D-\alpha_1}{l_{\alpha 1}} - \frac{r'm}{D}\cdot\frac{D-\alpha_2}{l_{\alpha 2}} + \frac{n\beta_2}{l_{\beta 2}} + \frac{p\beta_1}{l_{\beta 1}} + S + T - \cos\vartheta\right) + \\ & + \frac{1}{2}q'\left(\frac{D}{l_0'} + p'\frac{D-\alpha_1'}{l_{\alpha 1}'} + n'\frac{D-\alpha_2'}{l_{\alpha 2}'} - \frac{r}{D}\cdot\frac{\beta_1'}{l_{\beta 1}'} - \frac{r}{D}\cdot\frac{m\beta_2'}{l_{\beta 2}'} - S' - T'\right).\end{aligned} \tag{b}$$

Die von der Kugeloberfläche ausgehenden Flüsse bezeichnen wir als positiv, die in sie mündenden als negativ.

Einen analogen Ausdruck finden wir für den Fluß $\psi'(r',\vartheta')$, der die Kugelzone $P'OP'$ der Kugel K' durchsetzt:

$$\begin{aligned}\psi'(r',\vartheta') = {} & \frac{1}{2}Q\left(\frac{D}{t_0} + p\frac{D-\beta_1}{t_{\beta 1}} + n\frac{D-\beta_2}{t_{\beta 2}} - \frac{r'm}{D}\cdot\frac{\alpha_2}{t_{\alpha 2}} - \frac{r'}{D}\cdot\frac{\alpha_1}{t_{\alpha 1}} - S - T\right) + \\ & + \frac{1}{2}q'\left(-\frac{r}{D}\cdot\frac{D-\beta_1'}{t_{\beta 1}'} - \frac{rm}{D}\cdot\frac{D-\beta_2'}{t_{\beta 2}'} + \frac{n'\alpha_2'}{t_{\alpha 2}'} + \frac{p'\alpha_1'}{t_{\alpha 1}'} + S' + T' - \cos\vartheta'\right).\end{aligned} \tag{c}$$

Bei Berücksichtigung der aus (7) und (8) folgenden Beziehungen

$$\begin{gathered}\frac{\alpha_1}{r'} = \frac{r'}{D}; \quad \frac{\alpha_1'}{r'} = \frac{r'}{D-\beta_1'}; \quad \frac{\alpha_2}{r'} = \frac{r'}{D-\beta_1}; \quad \frac{\alpha_2'}{r'} = \frac{r'}{D-\beta_2'}; \\ \frac{\beta_1'}{r} = \frac{r}{D}; \quad \frac{\beta_1}{r} = \frac{r}{D-\alpha_1}; \quad \frac{\beta_2'}{r} = \frac{r}{D-\alpha_1'}; \quad \frac{\beta_2}{r} = \frac{r}{D-\alpha_2}\end{gathered} \tag{d}$$

erhalten wir auf Grund von (17) ÷ (19)

$$\begin{gathered}\frac{D}{l_0'} = \frac{r}{l_{\beta 1}'}; \quad \frac{D-\alpha_1}{l_{\alpha 1}} = \frac{r}{l_{\beta 1}}; \quad \frac{D-\alpha_1'}{l_{\alpha 1}'} = \frac{r}{l_{\beta 2}'}; \quad \frac{D-\alpha_2}{l_{\alpha 2}} = \frac{r}{l_{\beta 2}}; \\ \frac{D}{t_0} = \frac{r'}{t_{\alpha 1}}; \quad \frac{D-\beta_1'}{t_{\beta 1}'} = \frac{r'}{t_{\alpha 1}'}; \quad \frac{D-\beta_1}{t_{\beta 1}} = \frac{r'}{t_{\alpha 2}}; \quad \frac{D-\beta_2'}{t_{\beta 2}'} = \frac{r'}{t_{\alpha 2}'}.\end{gathered} \tag{e}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen finden wir folgende Ausdrücke für $\psi(r,\vartheta)$ und $\psi'(r',\vartheta')$:

$$\begin{aligned}\psi(r,\vartheta) = {} & \frac{1}{2}Q\left[\frac{r}{l_{\beta 1}}\left(\frac{p\beta_1}{r} - \frac{r'}{D}\right) + \frac{r}{l_{\beta 2}}\left(\frac{n\beta_2}{r} - \frac{mr'}{D}\right) + S + T - \cos\vartheta\right] + \\ & + \frac{1}{2}q'\left[\frac{D}{l_0}\left(1 - \frac{\beta_1'}{D}\right) + \frac{r}{l_{\beta 2}'}\left(p' - \frac{m\beta_2'}{D}\right) + n'\frac{D-\alpha_2'}{l_{\alpha 2}'} - S' - T'\right];\end{aligned} \tag{f}$$

$$\psi'(r',\vartheta') = \frac{1}{2}Q\left[\frac{D}{t_0}\left(1-\frac{\alpha_1}{D}\right)+\frac{r'}{t_{\alpha 2}}\left(p-\frac{m\alpha_2}{D}\right)+n\frac{D-\beta_2}{t_{\beta 2}}-S-T\right]+$$
$$+\frac{1}{2}q'\left[\frac{r'}{t'_{\alpha 1}}\left(\frac{p'\alpha'_1}{r'}-\frac{r}{D}\right)+\frac{r'}{t'_{\alpha 2}}\left(\frac{n'\alpha_2}{r'}-\frac{mr}{D}\right)+S'+T'-\cos\vartheta'\right]. \qquad (g)$$

Bei Einführung der Bezeichnungen

$$M_1 = 1-\frac{\beta'_1}{D} = 1-\varrho^2; \quad N_1 = 1-\frac{\alpha_1}{D} = 1-\varrho'^2; \quad M_5 = n'; \quad N_5 = n; \qquad (20)$$

$$M_6 = \frac{\beta_2 n}{r}-\frac{mr'}{D} = \frac{\varrho n}{1-\varrho'^2 s}-m\varrho'; \quad N_6 = \frac{\alpha'_2 n'}{r'}-\frac{mr}{D} = \frac{\varrho' n'}{1-\varrho^2 s'}-m\varrho; \qquad (21)$$

$$M_7 = p'-\frac{m\beta'_2}{D} = p'-m\varrho^2 s'; \quad N_7 = p-\frac{m\alpha_2}{D} = p-m\varrho'^2 s; \qquad (22)$$

$$M_8 = \frac{p\beta_1}{r}-\frac{r'}{D} = \frac{p^2}{\varrho'}-\varrho'; \quad N_8 = \frac{p'\alpha'_1}{r'}-\frac{r}{D} = \frac{p'^2}{\varrho}-\varrho, \qquad (23)$$

erhalten wir die endgültigen Ausdrücke

$$\psi(r,\vartheta) = \frac{Q}{2}\left(M_8\frac{r}{l_{\beta 1}}+M_6\frac{r}{l_{\beta 2}}+S+T-\cos\vartheta\right)+$$
$$+\frac{q'}{2}\left(M_1\frac{r}{l'_{\beta 1}}+M_7\frac{r}{l'_{\beta 2}}+n'\frac{D-\alpha'_2}{l'_{\alpha 2}}-S'-T'\right); \qquad (24)$$

$$\psi'(r',\vartheta') = \frac{Q}{2}\left(N_1\frac{r'}{t_{\alpha 1}}+N_7\frac{r'}{t_{\alpha 2}}+n\frac{D-\beta_2}{t_{\beta 2}}-S-T\right)+$$
$$+\frac{q'}{2}\left(N_8\frac{r'}{t'_{\alpha 1}}+N_6\frac{r'}{t'_{\alpha 2}}+S'+T'-\cos\vartheta'\right). \qquad (25)$$

Meistens rechnen wir nicht mit den Ladungen Q, q', sondern mit den Potentialen V, V' beider Kugeln, die sich aus den Hauptladungen nach (1) ergeben. Es erscheint zweckmäßig, den Parameter

$$\eta = \frac{V}{V'} \qquad (26)$$

einzuführen. Man erhält dann

$$\frac{\psi(r,\vartheta)}{2\pi\varepsilon_0 V'} = r\eta\left(M_8\frac{r}{l_{\beta 1}}+M_6\frac{r}{l_{\beta 2}}+S+T-\cos\vartheta\right)+$$
$$+r'\left(M_1\frac{r}{l'_{\beta 1}}+M_7\frac{r}{l'_{\beta 2}}+n'\frac{D-\alpha'_2}{l'_{\alpha 2}}-S'-T'\right); \qquad (27)$$

$$\frac{\psi'(r',\vartheta')}{2\pi\varepsilon_0 V'} = r\eta\left(N_1\frac{r'}{t_{a1}} + N_7\frac{r'}{t_{a2}} + n\frac{D-\beta_2}{t_{\beta 2}} - S - T\right) +$$
$$+ r'\left(N_8\frac{r'}{t'_{a1}} + N_6\frac{r'}{t'_{a2}} + S' + T' - \cos\vartheta'\right). \quad (28)$$

Am bequemsten läßt sich $\psi(r,\vartheta)$ und $\psi'(r',\vartheta')$ aus (27) und (28) berechnen, wenn man Reihenentwicklungen mit den Polynomen von Legendre benutzt. Zu diesem Zweck setzen wir

$$\frac{r}{l'_{\beta 1}} = F_1; \quad \frac{D-\alpha'_2}{l'_{a2}} = F_5; \quad \frac{r}{l'_{\beta 2}} = F_7; \quad \frac{r}{l_{\beta 2}} = F_6; \quad \frac{r}{l_{\beta 1}} = F_8; \quad (29)$$

$$\frac{r'}{t_{a1}} = G_1; \quad \frac{D-\beta_2}{t_{\beta 2}} = G_5; \quad \frac{r'}{t_{a2}} = G_7; \quad \frac{r'}{t'_{a2}} = G_6; \quad \frac{r'}{t'_{a1}} = G_8, \quad (30)$$

wobei

$$F_\gamma = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_\gamma^n P_n(\vartheta); \quad G_\gamma = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_\gamma^n P_n(\vartheta'). \quad (31)$$

γ kann die Werte 1, 5, 6, 7, 8 annehmen. $P_n(\vartheta)$ und $P_n(\vartheta')$ sind die Legendre'schen Polynome. Die Werte von x_γ und y_γ sind

$$\left.\begin{array}{llllll} \gamma = 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ x_\gamma = \varrho & \varrho\dfrac{1-\varrho^2 s'}{1-\varrho'^2-\varrho^2 s'} & \dfrac{\varrho}{1-\varrho'^2 s} & \varrho s' & \dfrac{p}{\varrho'} \\ y_\gamma = \varrho' & \varrho'\dfrac{1-\varrho'^2 s}{1-\varrho^2-\varrho'^2 s} & \dfrac{\varrho'}{1-\varrho^2 s'} & \varrho' s & \dfrac{p'}{\varrho} \end{array}\right\} \quad (32)$$

Bei Berücksichtigung von (29) und (30) kann man die Gleichungen (27), (28) in folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{\varphi(r,\vartheta)}{2\pi\varepsilon_0 V'} = r\eta(M_6F_6 + M_8F_8 + S + T - \cos\vartheta) + r'(M_1F_1 + M_5F_5 + M_7F_7 - S' - T'); \quad (33)$$

$$\frac{\psi'(r',\vartheta')}{2\pi\varepsilon_0 V'} = r\eta(N_1G_1 + N_5G_5 + N_7G_7 - S - T) + r'(N_6G_6 + N_8G_8 + S' + T' - \cos\vartheta'). \quad (34)$$

Die Formeln (24) und (25) können wir auch benützen, um zu prüfen, ob bei Berechnung von M_γ und N_γ kein Fehler unterlaufen ist. Wenn wir nämlich in diese Ausdrücke $\vartheta = 0$ bezw. $\vartheta' = 0$ einsetzen, müssen die Funktionen $\psi(r,\vartheta)$ bezw. $\psi'(r',\vartheta')$ den Wert Null annehmen; da die Größen Q, q' unabhängig voneinander sind, müssen für $(\vartheta,\vartheta') = 0$ beide Koeffizienten von Q und q' gleich Null sein. Wenn wir dagegen in (24) $\vartheta = 180°$ einsetzen, so wird der erhaltene Wert $\psi(r,\vartheta)$ gleich der ganzen Ladung H der Kugel K, d.h. es ist dann

$$\psi(r,\vartheta) = QS - T'q'.$$

Aus den gleichen Gründen wie oben ist dann der Koeffizient von Q in $\psi(r,\vartheta)$ für $\vartheta=\pi$ gleich S, der Koeffizient von q' gleich $-T'$. Analog muß für $\vartheta'=180^\circ$ der Koeffizient von Q in $\psi'(r',\vartheta')$ gleich $-T$, derjenige von q' gleich S' sein. Durch Einsetzen von $(\vartheta,\vartheta')=0$ oder $(\vartheta,\vartheta')=\pi$ in (31) erhält man

$$\text{bei } \vartheta=0 \qquad F_\gamma=\frac{1}{1-x_\gamma}; \qquad G_\gamma=\frac{1}{1-y_\gamma}; \tag{35}$$

$$\text{bei } \vartheta=\pi \qquad F_\gamma=\frac{1}{1+x_\gamma}; \qquad G_\gamma=\frac{1}{1+y_\gamma}. \tag{36}$$

Die hier erwähnten Werte der Koeffizienten von Q, q' in $\psi(r,\vartheta)$ bezw. $\psi'(r',\vartheta')$ bei $(\vartheta,\vartheta')=0$ oder $=\pi$ können nicht aus den allgemeinen Gleichungen (24), (25) erhalten werden, da dieselben nur angenähert sind.

B e i s p i e l 2. Kontrolle der Koeffizienten in (24) und (25) für die Werte von ϑ bezw. ϑ' gleich Null oder gleich π. Im Falle $\varrho=0{,}2$; $\varrho'=0{,}5$ erhalten wir auf Grund von (3), (8), (11), (12), (15), (16) und (20) bis (23):

$S=1{,}1557$; $S'=1{,}1216$; $T=0{,}5822$; $T'=0{,}2329$;
$M_1=0{,}96$; $M_5=0{,}0174$; $M_7=0{,}09527$; $M_6=-0{,}0762$; $M_8=-0{,}4644$;
$N_1=0{,}75$; $N_5=0{,}0223_5$; $N_7=0{,}0899$; $N_6=-0{,}0237$; $N_8=-0{,}1457_5$;
$x_1=0{,}2$; $x_5=0{,}2715$; $x_7=0{,}2704$; $x_6=0{,}2718$; $x_8=0{,}2667$;
$y_1=0{,}5$; $y_5=0{,}5280$; $y_7=0{,}5282$; $y_6=0{,}5286$; $y_8=0{,}5208$;

Es folgt daraus für $(\vartheta,\vartheta')=0$

$F_1=1{,}25$; $F_5=1{,}3726$; $F_7=1{,}3706$; $F_6=1{,}3732$; $F_8=1{,}3636$;
$G_1=2{,}0$; $G_5=2{,}1185_5$; $G_7=2{,}1194$; $G_6=2{,}1213$; $G_8=2{,}0869$;

Die Koeffizienten von Q und q' sind:

im Ausdruck $\psi(r,\vartheta)$:

$-0{,}4644\cdot1{,}3636-0{,}0762\cdot1{,}3732+1{,}1557+0{,}5822-1=0$;
$0{,}96\cdot1{,}25+0{,}0953\cdot1{,}3706_5+0{,}0174\cdot1{,}3726-1{,}1216-0{,}2329=0$.

Im Ausdruck $\psi'(r',\vartheta')$:

$0{,}75\cdot2+0{,}0899\cdot2{,}1194+2{,}1185_5\cdot0{,}0223-1{,}1557-0{,}5822=-0{,}0001$;
$-2{,}1213\cdot0{,}0237-0{,}1457_5\cdot2{,}0869+1{,}1216+0{,}2329-1=0$.

Für $(\vartheta,\vartheta')=180^\circ$ erhalten wir

$F_1=0{,}8333$; $F_5=0{,}7865$; $F_7=0{,}7871_5$; $F_6=0{,}7863$; $F_8=0{,}7894_5$;
$G_1=0{,}6667$; $G_5=0{,}6545$; $G_7=0{,}6544$; $G_6=0{,}6542$; $G_8=0{,}6575$.

Die Koeffizienten von Q und q' sind:

im Ausdruck $\psi(r,\vartheta)$:

$^1/_2(-0{,}4644\cdot0{,}7894_5-0{,}0762\cdot0{,}7863+1{,}1557+0{,}5822)=1{,}1557=S$;
$^1/_2(0{,}96\cdot0{,}8333+0{,}0953\cdot0{,}7871_5+0{,}0174\cdot0{,}7865-1{,}1216-0{,}2329)=$
$=-0{,}2329=-T'$

im Ausdruck $\psi'(r', \vartheta')$:

$$\tfrac{1}{2}(0{,}75 \cdot 0{,}6667 + 0{,}0899 \cdot 0{,}6544 + 0{,}0224 \cdot 0{,}6545 - 1{,}1557 - 0{,}5822) = = -0{,}5822 = -T;$$

$$\tfrac{1}{2}(-0{,}1457 \cdot 0{,}6575 - 0{,}0237 \cdot 0{,}6542 + 1{,}1216 + 0{,}2329 + 1) = 1{,}1215;$$
$$S = 1{,}1216.$$

Das hier entwickelte Verfahren zur Berechnung der Flüsse mit Hilfe der Legendre'schen Polynome ist zwar bequem, es läßt sich jedoch nicht immer anwenden; so entstehen Schwierigkeiten, wenn x_γ bezw. y_γ verhältnismäßig groß sind, so daß die Reihen (31) nur langsam konvergieren. Um die vorgeschriebene Genauigkeit einzuhalten, ist es dann oft notwendig, viele Glieder dieser Reihen zu berechnen. Die Zahl dieser Glieder kann manchmal größer sein als die Zahl der Legendre'schen Polynome, die in den Funktionentafeln angegeben sind. So sind z.B. in den betreffenden Zahlentafeln [1] nur die Werte der 8 Polynome P_1 bis P_8; vorhanden, was manchmal nicht genügt. (Auch sind diese Tafeln nur vierstellig und diese Genauigkeit kann sich mitunter als ungenügend erweisen).

In derartigen Fällen muß man die Flüsse mittels der direkten Methode berechnen d.h. unter Benützung der Gleichungen (27), (28) und (17) bis (19); die Rechenarbeit wird dann allerdings größer.

4. GRENZWINKEL

Oft hat man mit Feldern zu tun, wie sie in Bild 3 schematisch dargestellt sind. Das Charakteristische an diesen Feldern ist, daß einige der

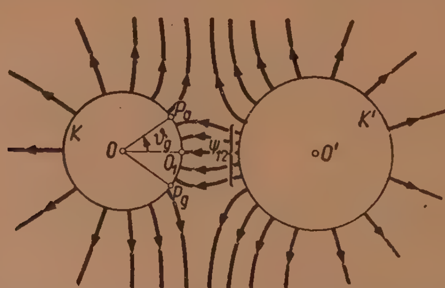


Bild 3. Grenzwinkel und Grenzpunkte auf Kugel K.

Feldlinien, die von der Kugel K' ausgehen, auf der Kugel K münden, während die übrigen Linien, die sowohl von K wie auch von K' ausgehen, in die Unendlichkeit verlaufen. Auf diese Weise sind die beiden Kugeln gleichsam durch ein Büschel Feldlinien verbunden, dessen Fluß ψ_{12} unmittelbar den Zahlenwert der Teilkapazität K_{12} bestimmt.

Man muß dabei berücksichtigen, daß die Situation der beiden Kugeln auf Bild 3 durchaus nicht die gleiche ist. Auf der Oberfläche der Kugel K' sind alle Feldlinien auslaufende Linien, wogegen sie auf der Kugel K verschiedenen Richtungssinn haben. Die Grenze zwischen diesen beiden Büscheln ist der Kreis $P_g P_g$ auf der Oberfläche K. Den Winkel $\vartheta_g = \sphericalangle P_g O O_1$ bezeichnen wir als den Grenzwinkel. Die Bestimmung dieses Winkels ermöglicht uns die Berechnung des Flusses ψ_{12}; diese Methode, die wir die Methode der Grenzwinkel nennen, ist eingehend in [4] und [5] beschrieben.

Bezeichnen wir mit ψ_ϑ den Fluß, der eine Kugelzone der Kugel K durchsetzt; dabei soll der Zentralwinkel 2ϑ dieser Zone $\leqslant 2\vartheta_g$ sein. Der Fluß ψ_ϑ ist negativ; für kleine ϑ vergrößert sich $|\psi_\vartheta|$ mit wachsendem Winkel ϑ. Der Extremwert von $|\psi_\vartheta|$ kommt bei $\vartheta = \vartheta_g$ zustande; somit bestimmt die Gleichung

$$\frac{d\psi_\vartheta}{d\vartheta} = 0 \tag{37}$$

den Grenzwinkel ϑ_g.

Auf Grund von (37) folgt aus (33) und (34)

$$\eta_g = \frac{M_1 F_1' + M_5 F_5' + M_7 F_7'}{-M_6 F_6' - M_8 F_8' - \sin\vartheta_g} \cdot \frac{\varrho'}{\varrho}; \tag{38}$$

$$\eta_g' = \frac{-N_6 G_6' - N_8 G_8' - \sin\vartheta_g'}{N_1 G_1' + N_5 G_5' + N_7 G_7'} \cdot \frac{\varrho'}{\varrho}. \tag{39}$$

η_g (bezw. η_g') bedeutet hier denjenigen Wert des Parameters $\eta = V/V'$, für welchen der Winkel ϑ (bezw. ϑ') gleich dem Grenzwinkel ist, und

$$F_\gamma' = \frac{dF_\gamma}{d\vartheta}; \quad G_\gamma' = \frac{dG_\gamma}{d\vartheta}. \quad (\gamma = 1, 5, 6, 7, 8) \tag{40}$$

Wenn ϑ_g bezw. ϑ_g' gegeben sind, kann man aus (38) und (39) leicht η_g bezw. η_g' berechnen; die umgekehrte Rechnung (dh. die Bestimmung von ϑ_g aus gegebenem η_g u.s.f.) kann man mittels aufeinanderfolgender Proben und Einengen ihres Intervalles vornehmen.

Die Benützung von (38) und (39) bringt manchmal dieselben Unzulänglichkeiten mit sich, die oben am Ende des Absatzes 3 geschildert werden. Sie entstehen dann, wenn die Reihen

$$F_\gamma' = \sum_{n=1}^{\infty} x_\gamma^n P_n'(\vartheta); \quad G_\gamma' = \sum_{n=1}^{\infty} y_\gamma^n P_n'(\vartheta') \tag{41}$$

nur langsam konvergieren und in den Tafeln der Ableitungen Legendre'scher Polynome nicht so viele Werte P_n' vorhanden sind, wie es die

Rechnung verlangen würde. In diesem Falle wenden wir die direkte Methode an. Dieselbe müssen wir auch dann benützen, wenn die Winkel ϑ und ϑ' die Werte 0° oder 180° annehmen.

Die direkte Methode beruht auf der Feststellung, daß in den Punkten auf dem Kreisumfang $P_g P_g$ (Bild 3)

$$K=0 \tag{42}$$

ist. Wenn der Abstand der Punktladung Q vom Mittelpunkt O einer Metallkugel gleich A ist, so beträgt die Feldstärke K, die im Punkt P dieser Kugel von Q erzeugt wird,

$$|K| = \frac{Q\,|A\cos\vartheta - r|}{4\pi\varepsilon_0 t^3} \tag{43}$$

(vgl. [4]); dabei ist $\vartheta = \sphericalangle QOP$; $t = QP$; r = Kugelradius.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{D\cos\vartheta - r}{l_0^3} = L_0\,; \quad \frac{(D-\alpha_i)\cos\vartheta - r}{l_{\alpha i}^3} = L_{\alpha i}\,; \quad \frac{(D-\alpha_i')\cos\vartheta - r}{(l_{\alpha i}')^3} = L_{\alpha i}'$$

$$\frac{r-\beta_i\cos\vartheta}{l_{\beta i}^3} = L_{\beta i}\,; \quad \frac{r-\beta_i'\cos\vartheta}{(l_{\beta i}')^3} = L_{\beta i}'\,; \quad (i=1,2); \tag{44}$$

$$\frac{D\cos\vartheta' - r'}{t_0^3} = T_0\,; \quad \frac{(D-\beta_i)\cos\vartheta' - r'}{t_{\beta i}^3} = T_{\beta i}\,; \quad \frac{(D-\beta_i')\cos\vartheta' - r'}{(t_{\beta i}')^3} = T_{\beta i}'\,;$$

$$\frac{r'-\alpha_i\cos\vartheta'}{t_{\alpha i}^3} = T_{\alpha i}\,; \quad \frac{r'-\alpha_i'\cos\vartheta'}{(t_{\alpha i}')^3} = T_{\alpha i}'\,; \quad (i=1,2)\,. \tag{45}$$

Die Feldstärke (43), welche durch die im Bild 1b dargestellte Folge von Punktladungen in den Punkten P_g und P_g' (Bild 2) erzeugt wird, können wir durch Superposition erhalten:

$$-q'L_0 + q_1L_{\alpha 1} - q_1'L_{\alpha 1}' + q_{2z}L_{\alpha 2} - q_{2z}'L_{\alpha 2}' + \frac{Q}{r^2} - Q_1'L_{\beta 1}' + Q_1L_{\beta 1} - \\ - Q_{2z}'L_{\beta 2}' + Q_{2z}L_{\beta 2} = 0$$

$$-QT_0 + Q_1'T_{\beta 1}' - Q_1T_{\beta 1} + Q_{2z}'T_{\beta 2}' - Q_{2z}T_{\beta 2} + \frac{q'}{r'^2} - q_1T_{\alpha 1} + q'T_{\alpha 1}' - \\ - q_{2z}T_{\alpha 2} + q_{2z}'T_{\alpha 2}' = 0 \tag{h}$$

Wenn wir hier die Ausdrücke (9) und (10) einsetzen, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (26) und (1)

für die Punkte P_g auf Kugel K:

$$\eta_v = \frac{L_0 + p'L_{\alpha 1}' + n'L_{\alpha 2}' + \varrho L_{\beta 1}' + m\varrho L_{\beta 2}'}{1/r^2 + \varrho' L_{\alpha 1} + m\varrho' L_{\alpha 2} + pL_{\beta 1} + nL_{\beta 2}} \cdot \frac{\varrho'}{\varrho}\,; \tag{46}$$

für die Punkte P'_g auf Kugel K':

$$\eta'_g = \frac{1/r'^2 + p'T'_{\alpha 1} + n'T'_{\alpha 2} + \varrho T'_{\beta 1} + m\varrho T'_{\beta 2}}{T_0 + \varrho' T_{\alpha 1} + m\varrho' T_{\alpha 2} + pT_{\beta 1} + nT_{\beta 2}} \cdot \frac{\varrho'}{\varrho}. \tag{47}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (46) und (47) können wir (ähnlich wie aus (38) bezw. (39) für gegebene $\vartheta_g, \vartheta'_g$ die diesen Größen entsprechenden Werte von η_g, η'_g berechnen (über die umgekehrte Rechnung s. Text nach Gl. (39)).

Beide hier beschriebenen Rechnungsverfahren: die Methode der Legendre'schen Polynome und die direkte Methode, sind im Beispiel 3 (Absatz 7) angewendet worden.

Wenn wir nun den Koeffizienten η_g (bezw. η'_g) kennen, der einem bestimmten Winkel ϑ_g bezw. ϑ'_g) entspricht, so können wir mittels Gleichungen, die im Absatz 3 entwickelt wurden, den Fluß $\psi(r, \vartheta_g)$ (bezw. $\psi'(r', \vartheta'_g)$ berechnen; so ist z.B. für das in Bild 3 dargestellte Feld $\psi(r, \vartheta_g) = \psi_{12}$.

5. GLEICHGEWICHTSPUNKTE

Ein im elektrischen Feld befindlicher Punkt, in welchem die Feldstärke K gleich Null ist, wird bekanntlich Gleichgewichtspunkt genannt [2]. Wenn wir, wie dies vielfach der Fall ist, die Lage der Gleichgewichtspunkte kennen, ist es leichter, das Feldbild zu konstruieren und dessen Eigenschaften kennenzulernen. In dem hier behandelten Feld zweier Kugeln ist die Lage des Gleichgewichtspunktes eines der wichtigsten charakteristischen Merkmale jedes konkreten speziellen Feldes.

Wir suchen die Gleichgewichtspunkte R auf der Geraden OO', die die Mittelpunkte der Kugeln verbindet. Dabei unterscheiden wir 2 Fälle, je nachdem, ob R auf „äußeren" Halbgeraden O'_2E', bezw. O_2E (Bild 2) gelegen ist, oder auf der „inneren" Strecke $O_1O'_1$. Wir benützen folgende Bezeichnungen:

$$\frac{1}{(RO')^2} = z'_0; \quad \frac{1}{(RA_i)^2} = z_{\alpha i}; \quad \frac{1}{(RA'_i)^2} = z'_{\alpha i} \quad (i=1,2) \tag{48}$$

$$\frac{1}{(RO)^2} = z_0; \quad \frac{1}{(RB_i)^2} = z_{\beta i}; \quad \frac{1}{(RB'_i)^2} = z'_{\beta i} \tag{49}$$

RA_i bedeutet die Entfernung von R und A_i
RA'_i „ „ „ „ R „ A'_i u.s.f.

Wenn R sich auf den äußeren Halbgeraden befindet, können wir schreiben

$$Qz_0 + Q_1 z_{\beta 1} + Q_{2z} z_{\beta 2} - Q'_1 z'_{\beta 1} - Q'_{2z} z'_{\beta 2} + q'_{2z} z'_{\alpha 2} + q'_1 z'_{\alpha 1} + q' z'_0 - q_{2z} z_{\alpha 2} - q_1 z_{\alpha 1} = 0; \quad \text{(i)}$$

[2] s. Anhang.

liegt dagegen R auf der inneren Strecke, so ist

$$Qz_0+Q_1z_{\beta 1}+Q_{22}z_{\beta 2}-Q_1'z_{\beta 1}'-Q_{22}'z_{\beta 2}'-q_{22}'z_{\alpha 2}'-q_1'z_{\alpha 1}'-q'z_0'+q_{22}z_{\alpha 2}+q_1z_{\alpha 1}=0\,. \quad (j)$$

Wenn wir in diese Gleichungen die Ausdrücke (9) und (10) einsetzen, so erhalten wir aus (2b) und (1)

$$\eta=\frac{\mp z_0'\mp p'z_{\alpha 1}'\mp n'z_{\alpha 2}'+\varrho z_{\beta 1}'+m\varrho z_{\beta 2}'}{z_0\mp\varrho' z_{\alpha 1}\mp m\varrho' z_{\alpha 2}+pz_{\beta 1}+nz_{\beta 2}}\cdot\frac{\varrho'}{\varrho}\,. \quad (50)$$

Die oberen Vorzeichen gelten für die Lage des Punktes R auf den äußeren Halbgeraden, die unteren für seine Lage auf der inneren Strecke.

Die Gleichung (50) ermöglicht es, den Wert η zu finden, der einer bekannten Lage von R entspricht. Das umgekehrte Problem kann durch aufeinanderfolgende Proben gelöst werden. Aus der Gleichung (50) folgt, daß jeder Lage des Gleichgewichtspunktes auf OO' ein Wert von η entspricht; man kann diesen Satz auch umkehren: jedem Wert von $\eta=V/V$ entspricht eine bestimmte Lage von R. Eine Ausnahme bilden hier die beiden Werte $\eta=\pm\infty$ (d.h. der Fall $V'=0$), welchem nur ein Gleichgewichtspunkt R_∞^* entspricht, der durch die Gleichung

$$z_0+pz_{\beta 1}+nz_{\beta 2}=\varrho'(z_{\alpha 1}+mz_{\alpha 2}) \quad (51)$$

bestimmt ist. Dieser Punkt liegt auf der äußeren Halbgeraden (eine andere Annahme führt zum Widerspruch). Dem Wert $\eta=0$ entspricht der Gleichgewichtspunkt R_0^*, für welchen

$$\varrho(z_{\beta 1}'+mz_{\beta 2}')=z_0'+p'z_{\alpha 1}'+n'z_{\alpha 2}'\,; \quad (52)$$

R_0^* befindet sich ebenfalls auf einer der äußeren Halbgeraden (eine andere Annahme führt zum Widerspruch).

Liegt der Gleichgewichtspunkt R^* in der Unendlichkeit, so können wir schreiben

$$z_0'=z_{\alpha 1}'=z_{\alpha 2}'=z_{\beta 1}'=z_{\beta 2}'=z_0=z_{\alpha 1}=z_{\alpha 2}=z_{\beta 1}=z_{\beta 2}\,;$$

der Koeffizient η^* ist dann

$$\eta^*=\frac{\varrho(m+1)-1-p'-n'}{1+p+n-\varrho'(m+1)}\cdot\frac{\varrho'}{\varrho}=\frac{T'-S'}{S-T}\cdot\frac{\varrho'}{\varrho}\,,$$

oder mit den Bezeichnungen

$$a=r(S-T)\,;\qquad a'=r'(S'-T') \quad (53)$$

$$\eta^*=-\frac{a'}{a}\,. \quad (54)$$

Um uns über die Lage von R_∞^* und R_0^* klar zu werden, betrachten wir den allgemeinen Fall, daß die Halbmesser der Kugeln verschieden sind,

und nehmen an, daß $r' > r$ ist. Wie bekannt, ist $S > 1$, $S' > 1$, $S > T$ und $S' > T'$. Aus (3) folgt dann $p > p'$. aus (12): $n > n'$; aus (15): $S > S'$, aus (16) $T > T'$. Aus $D > r + r'$ folgt $k > 2$, und $\varrho' p' > \varrho p$; $\varrho' n' > \varrho n$. Aus (53), (14) und (15) folgt $a' > a$, d h. daß der Wert η^*, der dem in der Unendlichkeit liegenden Punkt R^* entspricht, < -1 ist.

Wir setzen

$$d = rS; \qquad d' = r'S'; \qquad g = \frac{S}{T}; \qquad g' = \frac{S'}{T'} \tag{55}$$

und erhalten dann

$$d' > d; \qquad g > 1; \qquad g' > 1; \qquad g' > g.$$

Wir werden nunmehr zeigen, daß R^*_∞ auf der Halbgeraden $O_2'E'$ (Bild 2) liegt. Wenn wir das Verhältnis der Strecken $O_2'R^*_\infty$ und $OO' = D$ mit σ bezeichnen, so erhalten wir aus (51)

$$\frac{1}{(\sigma D + r' + D)^2} + \frac{p}{(\sigma D + r' + D - \beta_1)^2} + \frac{n}{(\sigma D + r' + D - \beta_2)^2} =$$
$$= \frac{\varrho'}{(\sigma D + r' + a_1)^2} + \frac{m\varrho'}{(\sigma D + r' + a_2)^2}.$$

Es ist $\beta_1 \ll r' + D$, $\beta_2 \ll r' + D$ und $a_1 \approx a_2$. Auf Grund von (15), (16) und (8) kann man somit angenähert schreiben

$$\frac{S}{(\sigma D + r' + D)^2} = \frac{T}{(\sigma D + r' + r'\varrho')^2},$$

oder

$$\sqrt{g} = \sqrt{\frac{S}{T}} = 1 + \frac{1 - \varrho'^2}{\sigma + \varrho' + \varrho'^2}. \tag{56}$$

Aus (56) können wir σ berechnen, das stets reell und positiv ist. Der größte Wert von g ergibt sich aus (56), wenn $\sigma = 0$; wir erhalten dann

$$g < g_{\max} = \frac{1}{\varrho'^2}.$$

Dieser Wert stimmt überein mit den Zahlen, die für g in [6] angegeben sind (vergl. Zahlentafel 4 in [6]; anstatt g wird dort das Zeichen g_{00} benützt).

Würden wir dagegen annehmen, daß der Gleichgewichtspunkt, der dem Wert $\eta = \infty$ entspricht, mit einem Punkt R'_∞ identisch ist, der sich auf EO_2 (Bild 2) befindet, so würden wir bei der weiteren Untersuchung dieser Annahme zum Widerspruch gelangen.

Wenn man in gleicher Weise die Gleichung (52) analysiert, so kann man zeigen, daß der Punkt R_0^* auf O_2E gelegen ist.

Auf Grund dieser Ueberlegungen wurde das Bild 4 zusammengestellt, das die Lage des Punktes R für verschiedene Werte von η zeigt (der Pfeil auf diesem Bild deutet die Richtung an, in der sich η vergrößert). Falls η Werte annimmt, die von $+\infty$ angefangen immer kleiner werden, so bewegt sich R von R_∞^* nach links; für einen gewissen Wert $\eta = \eta_\pi'$ ist der entsprechende Gleichgewichtspunkt R_π' mit dem Punkt O_2' auf der Oberfläche der Kugel K' identisch. Bei einer weiteren Verkleinerung von

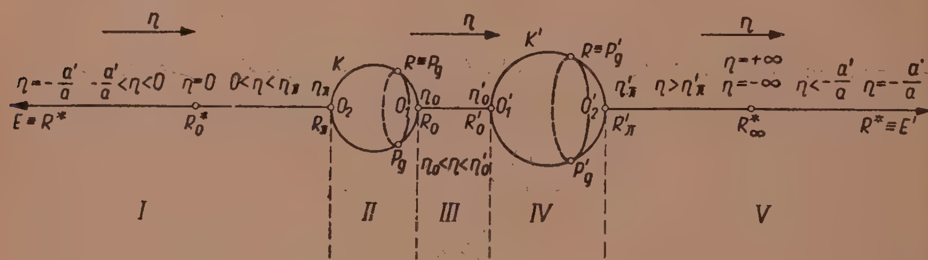


Bild 4. Lage des Gleichgewichtspunktes in einer der Zonen I bis V.

η erhält man für jeden Wert $\eta_1 > \eta_0'$ einen Kreis auf der Oberfläche der Kugel K'; jeder Punkt dieses Kreises ist ein Grenzpunkt P_g' und gleichzeitig Gleichgewichtspunkt, der diesem Wert η entspricht. Für $\vartheta' = 0$ nimmt η den Wert η_0' an und der betreffende Gleichgewichtspunkt ist $R_0' \equiv O_1'$.

Wird η noch weiter verkleinert, so verschiebt sich der entsprechende Gleichgewichtspunkt längs der Strecke $O_1'O_1$ und dann auf dem Kreisumfang auf K bis zum Punkt O_2, der den Werten $\vartheta = \pi$ und $\eta = \eta_\pi$ entspricht. Für $0 < \eta < \eta_\pi$ verschiebt sich R von O_2 bis R_0^*. Ist R auf der Halbgeraden R_0^*E gelegen, so ist η negativ und $|\eta| < a'/a$. Bei weiterem Verkleinern von η springt R über E und E' und bewegt sich nach links bis R_∞^* $(\eta = -\infty)$.

6. TEILKAPAZITÄTEN

In Uebereinstimmung mit dem in der Einleitung Gesagten, ganz besonders aber auf Grund der Betrachtungen in [7] und [10] hängen die Kapazitäten K_{11}, K_{12}, K_{22} im System zweier Kugeln von den Flüssen ψ_{11}, ψ_{12}, ψ_{22} ab, die von diesen Kugeln ausgehen und zur Unendlichkeit streben, bezw. auf der anderen Kugel münden. Diese Flüsse hängen vor allem von der Struktur des den ganzen Raum erfüllenden Feldes ab, das von den Ladungen und Potentialen bestimmt ist. Die Bedeutung der Gleichgewichtspunkte besteht darin, daß ihre Lage einen großen Einfluß auf

die Feldstruktur hat; deshalb bietet die Stelle, die der Punkt R auf der Achse OO' einnimmt, die beste Grundlage für eine Klassifizierung dieser Felder.

Wenn man von diesem Standpunkt aus Bild 4 betrachtet, so kann man darin 5 Zonen unterscheiden, die wertmäßig verschiedenen Feldstrukturen entsprechen:

Zone	*Lage des Gleichgewichtspunktes*
I	auf der Halbgeraden EO_2
II	„ „ Oberfläche der Kugel K
III	„ „ Strecke O_1O_1'
IV	„ „ Oberfläche der Kugel K'
V	„ „ Halbgeraden $O_2'E'$.

Jede Gerade, die durch einen Gleichgewichtspunkt ungerader Ordnung (s. Anhang) gezogen wird, schneidet in der Umgebung von R auf dessen beiden Seiten Feldlinien, die entgegengesetzten Richtungssinn aufweisen (s. Bild 5). Punkt R kann sich nicht innerhalb eines räumlich begrenzten Büschels von Feldlinien befinden, die von einer Elektrode herrühren und zu einer anderen Elektrode verlaufen; R erlangt damit eine Eigenschaft, die man als eine Art von Schirmwirkung auffassen kann. Es können also, wenn R z B. in der Zone I gelegen ist, keine Feldlinien entstehen, die von der Kugel K zur Unendlichkeit verlaufen (siehe Bild 6 I; der Beweis dieser Behauptung ist in [10] und [7] enthalten; deshalb kann man das Feld im Bild 6 I durch ein äquivalentes Schaltungsschema (Bild 7 I) darstellen. Wenn die Punkte $R \equiv P_g$ auf einem Kreis auf der Oberfläche der Ku-

Bild 5. Gleichgewichtspunkt erster Ordnung.

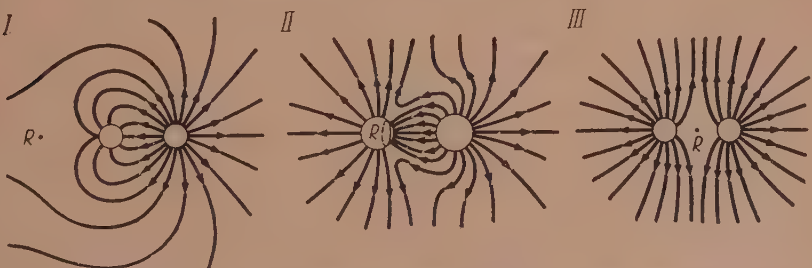


Bild 6. Schematische Feldbilder für die Lage des Gleichgewichtspunktes in der Zone I, II oder III.

gel K liegen (Zone II), so bildet dieser Kreisumfang gewissermaßen ein „Tor", auf dessen beiden Seiten sich Feldlinien mit entgegengesetztem Richtungssinn befinden. (Bild 6 II); wir bekommen für dieses Feld das

Schaltungsschema Bild 7 II. Bild 6 III zeigt schematisch die Feldgestaltung im Fall, wenn R sich auf der Strecke O_1O_1 befindet (Zone III); das entsprechende Schaltungsschema zeigt Bild 7 III. Analoge Schaltungsbilder erhält man für die Zonen IV und V.

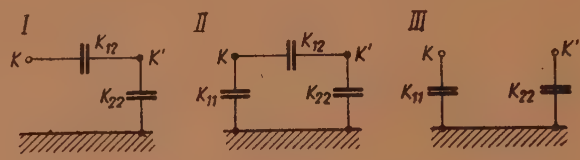


Bild 7. Ersatzschaltbilder für 3 Felder aus Bild 6.

Wenn wir die Bezeichnungen des Bildes 7 übernehmen und den Fluß der Linienbüschel

zwischen den Kugeln K und K' ψ_{12}
von der Kugel K zur ∞ ψ_{11}
" " " K' " ∞ ψ_{22}

nennen, so erhalten wir die Grundgleichungen für die physikalischen Teilkapazitäten

$$K_{11} = \left|\frac{H-\psi_{12}}{V}\right|; \qquad K_{12} = \left|\frac{\psi_{12}}{V-V'}\right|; \qquad K_{22} = \left|\frac{H'-\psi_{12}}{V'}\right|. \tag{57}$$

Man muß dabei berücksichtigen, daß derselbe Fluß ψ_{12} vom Standpunkt der einen Kugel aus ein positives Vorzeichen führen kann; vom Standpunkt der anderen Kugel aus ist er dann negativ.

Die Ausdrücke (57) eignen sich nicht besonders für praktische Berechnungen und graphische Darstellungen, da sie (außer ψ_{12}) 4 unabhängige Variable enthalten. Diese Zahl kann man auf 2 verringern, wenn man außer dem Parameter η noch das Parameter

$$\chi = \frac{H}{H'} \tag{58}$$

einführt. Die Beziehung zwischen den Parametern η und χ ergibt sich aus (13), (14) und (1) zu

$$\eta = \frac{V}{V'} = \frac{\chi g' + 1}{\chi + g}; \qquad \chi = \frac{H}{H'} = \frac{\eta g - 1}{g' - \eta}. \tag{59}$$

Außerdem ist

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \frac{S'H + T'H'}{SS' - TT'}; \qquad V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r'} \cdot \frac{TH + SH'}{SS' - TT'}. \tag{60}$$

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

$$w=\frac{SS'-TT'}{T'}\,r=\frac{SS'-TT'}{T}\,r'; \tag{61}$$

$$f=\frac{|\psi_{12}|}{2\pi\varepsilon_0\,|V'|} \tag{62}$$

und stellen auf Grund von (14), (55), (53) fest:

$$d=rS=bg; \quad d'=r'S'=bg'; \quad b=rT=r'T';$$

$$a=r(S-T)=b(g-1)=d-b; \quad a'=r'(S'-T')=b(g'-1)=d'-b; \tag{k}$$

$$wb=dd'-b^2. \tag{63}$$

Die Größen a, a', b, d, d', w, g, g', S, S', T, T' sind geometrische Parameter; man kann sie berechnen, wenn r, r', D bekannt sind. Die ersten 6 dieser Größen haben den Charakter einer Länge, die anderen sind dimensionslose Zahlen. Wir erhalten so die Ausdrücke für K_{ij} in den Zonen I, III, V als Funktionen von χ oder von η; in den Ausdrücken für die II. und IV. Zone ist noch die Größe f enthalten; f kann man mit Methoden berechnen, die im Absatz 2 und 3 beschrieben worden sind.

Zahlentafel 1

Teilkapazitäten K_{11}, K_{12}, K_{22} in den einzelnen Zonen

Zone	$K_{11}:4\pi\varepsilon_0$	$K_{12}:4\pi\varepsilon_0$	$K_{22}:4\pi\varepsilon_0$
I	0	$d-\frac{a}{1-\eta}=\frac{-\chi wb}{a-\chi a'}$	$a'+a\eta=w\frac{1+\chi}{g+\chi}$
II	$\left\lvert d-\frac{b-f}{\eta}\right\rvert=\left\lvert\frac{fg+\chi(w+f)}{1+\chi g'}\right\rvert$	$\frac{f}{1-\eta}=bf\frac{g+\chi}{a-\chi a'}$	$\lvert d'-f-b\eta\rvert=\left\lvert\frac{w}{\chi+g}-f\right\rvert$
III	$d-\frac{b}{\eta}=\frac{\chi w}{\chi g'+1}$	0	$d'-b\eta=\frac{w}{\chi+g}$
IV	$\left\lvert d-\frac{b+f}{\eta}\right\rvert=\left\lvert\frac{fg-\chi(w-f)}{-1-\chi g'}\right\rvert$	$\frac{f}{\eta-1}=bf\frac{-\chi-g}{a-\chi a'}$	$\lvert d'+f-\eta b\rvert=\left\lvert f-\frac{w}{\chi-g}\right\rvert$
V	$a+\frac{a'}{\eta}=w\frac{-\chi-1}{-1-\chi g'}$	$b+\frac{a'}{1-\eta}=\frac{wb}{a-\chi a'}$	0

Die Ergebnisse sind in der Zahlentafel 1 zusammengestellt (dabei kann auch das schematische Bild 8 von Nutzen sein). Es ist selbstverständlich, daß man in den Berührungspunkten zweier Zonen dieselben Ausdrücke

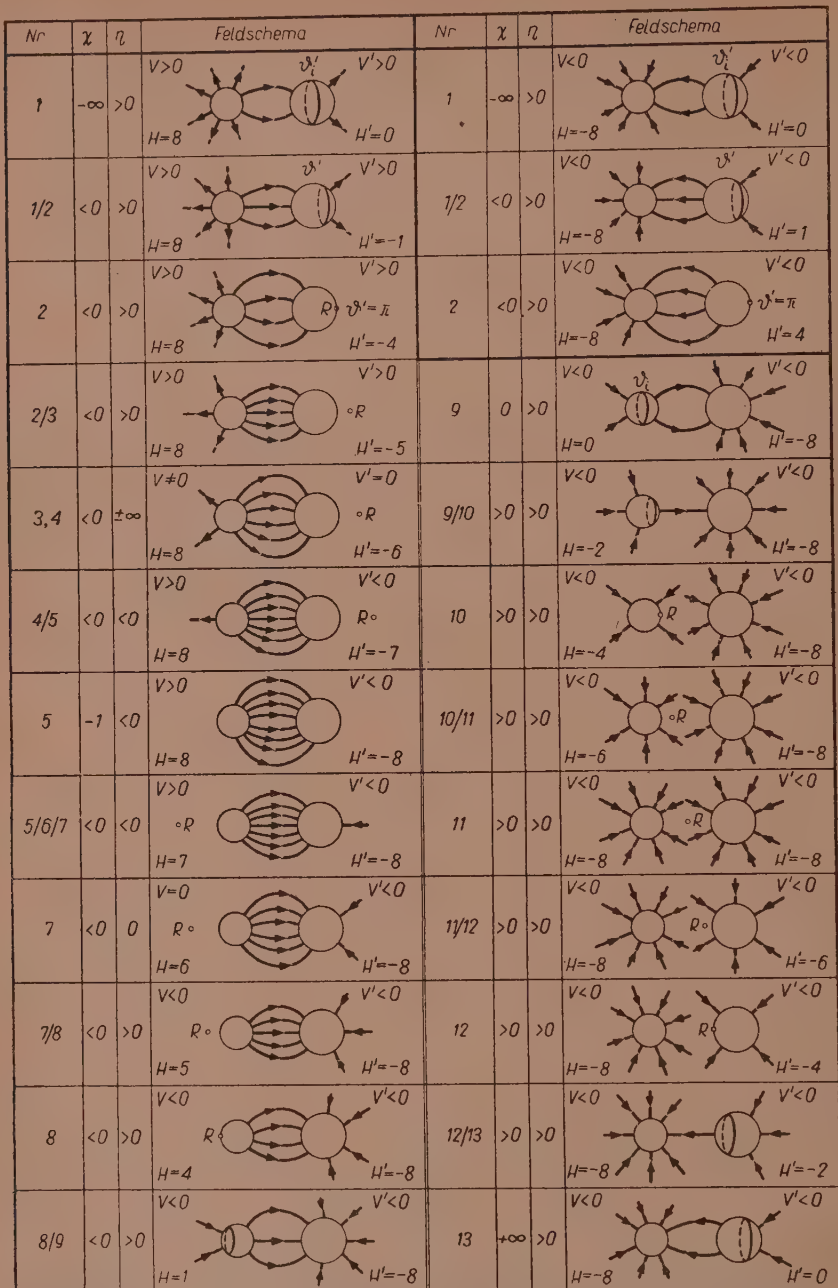


Bild 8. Schematische Feldbilder in den Fällen 1 bis 13 (siehe Zahlentafel 2).

für K_{ij} erhält, einerlei, ob man die Formeln der einen oder der anderen Nachbarzone verwendet. Wenn man die Formeln der Tafel 1 mit den

Formeln (102) bis (105) in [2] oder mit (23) und (24) in [3] vergleicht, und dabei die Ansätze derselben berücksichtigt, so sieht man, daß die in der Einleitung erwähnten Formeln aus [2] und [3] sich nur auf Zone I und V beziehen und keine der anderen Zonen einschließen.

Außer der in der Zahlentafel 1 vorgenommenen Klassifizierung ist noch eine andere möglich und zwar diejenige, in welcher die Ladungen bezw. die Potentiale, oder richtiger: die Verhältnisse dieser Größen, d. h. die Parameter χ oder η, die Grundlage bilden. Als Vorteil ergibt sich dabei, daß gewisse wichtigere oder besonders interessante Spezialfälle kenntlich gemacht werden, in welchen eine der Größen V, V', H, H' gleich Null ist, bezw. die Werte von η, χ gleich ± 1 sind. Außerdem ermöglicht diese Klassifizierung die graphische Darstellung von K_{ij} als Funktionen von χ oder η. Auf dieser Grundlage ist die Zahlentafel 2 aufgebaut. Es wurden dabei folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\chi_0\,(\eta_0); \quad \chi_0'\,(\eta_0'); \quad \chi_\pi\,(\eta_\pi); \quad \chi_\pi'\,(\eta_\pi') \tag{l}$$

sind Werte der Parameter χ und η wenn der Gleichgewichtspunkt die Lage

$$O_1; \quad O_1'; \quad O_2; \quad O_2' \tag{m}$$

einnimmt (Bild 4). f_0 und f_∞ bedeuten die Werte der Größe f (Gleichung 62) für $\eta=0$ und $\eta=\infty$. Die Winkel ϑ_i' und ϑ_i entsprechen der Influenz der Kugel K auf K' und umgekehrt. Wie bekannt (siehe [6], [7], [9]), entsteht die Influenz, wenn $\chi=0$ oder $\chi=\pm\infty$ ist. Den Zustand des Systems, in welchem $\eta=0$ oder $\eta=\pm\infty$ ist, nennen wir „Erdung" der Kugel K oder K'. Auf der Strecke zwischen dem Influenzpunkt (siehe z. B. Zahlentafel 2 Nr 1) und dem Erdungspunkt (z. B. Zahlentafel 2 Nr 3) sind Punkte gelegen, die einem Anomaliezustand $+-$ entsprechen, d. h. einem Zustand, in welchem das Potential einer Kugel und deren Ladung verschiedene Vorzeichen aufweisen (siehe [6] und [9]). Nr 3 und Nr 4 der Zahlentafel 2 wie auch Nr 13 und Nr 1 entsprechen geometrisch nur einem Gelichgewichtspunkt. Die Bezeichnung IV/V o. ä. bedeutet den Grenzpunkt zwischen den Zonen IV und V. Die aufeinanderfolgenden Werte der Parameter χ und η, die in den Kolonnen 2. und 3. enthalten sind, bilden eine monoton wachsende Zahlenfolge von $-\infty$ bis $+\infty$ (wir überzeugen uns davon, indem wir die Lagen der betreffenden Gleichgewichtspunkte betrachten). Die Tafel 2 enthält den Wert $\chi=+1$ nicht, weil der entsprechende Gleichgewichtspunkt sowohl in der Zone III wie auch in den Zonen II oder IV liegen kann.

Bei der Zusammenstellung der Zahlentafeln 1 und 2 kann Bild 8 von Nutzen sein, das Feldbilder sowohl in den Fällen Nr 1 — 13 der Zahlentafel 2 wie auch in den dazwischenliegenden Fällen schematisch darstellt (die Bezeichnung 2/3 u. ä. bedeuten den Feldzustand zwischen Nr 2 und

Teilkapazitäten K_{11}, K_{12}, K_{22} für einige charakteristische Punkte Zahlentafel 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nr	χ	η	ϑ, ϑ'	Zone	Bemerkungen	$K_{11}/4\pi\varepsilon_0$	$K_{12}/4\pi\varepsilon_0$	$K_{22}/4\pi\varepsilon_0$
1	$-\infty$	g'	$\vartheta'=\vartheta'_i$	IV	Influenz der Kugel K auf Kugel K'	$\frac{w-f_\infty}{g'}$	$\frac{bf_\infty}{a}$	f_∞
2	χ'_π	η'_π	$\vartheta'=\pi$	IV/V	Anomalie der Kugel K'; $\chi'_\pi<0$	$a+\frac{a'}{\eta'_\pi}=w\frac{-\chi'_\pi-1}{-\chi_\pi g-1}$	$b-\frac{a'}{\eta'_\pi-1}=\frac{wb}{a-\chi'_\pi a'}$	0
3	g	$+\infty$	—	V	Erdung der Kugel K'	a	b	0
4	g	$-\infty$		V	,, ,, ,,	a	b	0
5	1	$-\frac{a'}{a}$	—	V/I		0	$\frac{wb}{a+a'}$	0
6	$\frac{g+1}{g'+1}$	-1	—	I		0	$\frac{1}{2}(b+d)$	$d'-d$
7	$-\frac{1}{g'}$	0	—	I	Erdung der Kugel K	0	b	a'
8	χ_π	η_π	$\vartheta=\pi$	I/II	Anomalie der Kugel K; $\chi_\pi<0$	0	$d-\frac{a}{1-\eta_\pi}=\frac{-\chi_\pi wb}{a-\chi_\pi a'}$	$a'+a\eta_\pi=w\frac{1+\chi_\pi}{g+\chi_\pi}$
9	0	$\frac{1}{g}$	$\vartheta=\vartheta_i$	II	Influenz der Kugel K' auf Kugel K	$f_0 g$	$\frac{df_0}{a}$	$\frac{w}{g}=f_0$
10	χ_0	η_0	$\vartheta=0$	II/III		$d-\frac{b}{\eta_0}=\frac{\chi_0 w}{\chi_0 g'+1}$	0	$d'-b\eta_0=\frac{w}{\chi_0+g}$
11	$\frac{a}{a'}$	1		III		a	0	a'
12	χ'_0	η'_0	$\vartheta'=0$	III/IV		$d-\frac{b}{\eta'_0}=\frac{\chi'_0 w}{\chi'_0 g'+1}$	0	$d'-b\eta'_0=\frac{w}{\chi'_0+g}$
13				IV	Influenz der Kugel K auf Kugel K'	$w-f_\infty$	bf_∞	f

Nr 3). Die quantitativen Beziehungen ändern sich nicht, wenn man in jedem Feldbild den Richtungssinn aller Kraftlinien ändert (Beispiele: die ersten 3 Bilder Nr 1, 1/2 und 2).

Bekanntlich (siehe [7]) erhält man die Maxwellschen Teilkapazitäten C_{11}, C_{12}, C_{22} aus den physikalischen Teilkapazitäten für $\eta=0$ und $\eta=\infty$. Aus der Zahlentafel 2 folgt

$$C_{11}=4\pi\varepsilon_0 a\,; \qquad C_{12}=4\pi\varepsilon_0 b\,; \qquad C_{22}=4\pi\varepsilon_0 a'. \tag{64}$$

Dieselben Werte erhält man aus (13), (1) und (57) durch Einsetzen von $V=0$ und $V'=0$.

Das Schema Bild 7/II läßt sich nicht durch eine „gleichwertige" Kapazität K

$$K=K_{12}+\frac{K_{11}K_{22}}{K_{11}+K_{22}} \tag{65}$$

ersetzen, wie dies oft geschieht.

Die Begründung dieser Behauptung ist dieselbe wie in [8] Abs. 5 d. Man kann dagegen den Begriff einer „energiemäßig gleichwertigen" Kapazität K^* einführen:

$$K^*=K_{12}+K_{11}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^2+K_{22}\left(\frac{1}{\eta-1}\right)^2. \tag{66}$$

Die Energie des gesamten elektrischen Feldes ist gleich der Feldenergie eines Kondensators mit der Kapazität K^*, auf dessen Belegungen die Spannung $u=V-V'=V'(\eta-1)$ besteht.

7. BERECHNUNG DER TEILKAPAZITÄTEN IN EINEM GEGEBENEN KONKRETEN FALL (BEISPIEL 3)

Wir setzen $r=2$; $r'=5$; $D=10$. Dann ist $\varrho=0{,}2$; $\varrho'=0{,}5$. Aus (3) finden wir $p=0{,}133(3)$; $p'=0{,}10427$; $k=7{,}1$. Die aus (7) und (8) berechneten Größen $\alpha_i, \alpha_i', \beta_i, \beta_i'$ $(i=1,2)$ sind im Beispiel 1 angegeben. Wir berechnen weiter: aus (11):
$R=1{,}33578$; $m=0{,}16449$; aus (12): $n=0{,}02235$; $n'=0{,}01739$; aus (15): $S=1{,}15568$; $S'=1{,}12156$; aus (16): $T=0{,}58224_5$; $T'=0{,}23290$; aus (14): $b=1{,}16449$; aus (53): $a=1{,}14688$; $a'=4{,}44329$; aus (55): $d=2{,}31137$; $d'=5{,}60778$; $g=1{,}98487$; $g'=4{,}81565$; aus (61): $w=9{,}96617$.

Indem wir diese Werte in die Zahlentafel 1 einsetzen, erhalten wir Formeln, die in der Zahlentafel 3 zusammengestellt sind. Die einzige Größe, die dabei noch unbestimmt bleibt, ist die Größe f, die vom Fluß ψ_{12} abhängig ist und nur dann auftritt, wenn der Gleichgewichtspunkt

Zahlentafel 3

Zahlenwerte von K_{11}, K_{12}, K_{22} in den Zonen I ÷ V

$(r=2;\ r'=5;\ D=10)$

Zone	$K_{11} : 4\pi\varepsilon_0$	$K_{12} : 4\pi\varepsilon_0$	$K_{22} : 4\pi\varepsilon_0$
I	0	$2{,}3114-\frac{1{,}1469}{1-\eta}=$ $=\frac{-\chi}{0{,}0988-0{,}3829\chi}$	$4{,}4433+1{,}1469\eta=$ $=\frac{1+\chi}{0{,}1992+0{,}1003\chi}$
II	$2{,}3114-\frac{1{,}1645-f}{\eta}=$ $=\frac{1{,}9849f+(9{,}9662+f)\chi}{1+4{,}8156\chi}$	$\frac{f}{1-\eta}=$ $=f\frac{1{,}9849+\chi}{0{,}9763-3{,}8156\chi}$	$5{,}6078-f-1{,}1645\eta=$ $=\frac{1}{0{,}1003\chi+0{,}1992}-f$
III	$2{,}3114-\frac{1{,}1645}{\eta}=$ $=\frac{\chi}{0{,}4832\chi+0{,}1003}$	0	$5{,}6078-1{,}1645\eta=$ $=\frac{1}{0{,}1003\chi+0{,}1992}$
IV	$2{,}3114-\frac{f+1{,}1645}{\eta}=$ $=\frac{(9{,}9662-f)\chi-1{,}9849f}{4{,}8156\chi+1}$	$\frac{f}{\eta-1}=$ $=f\frac{1{,}9849+\chi}{3{,}8156\chi-0{,}9763}$	$5{,}6078+f-1{,}1645\eta=$ $=f+\frac{1}{0{,}1003\chi+0{,}1992}$
V	$1{,}1469+\frac{4{,}4433}{\eta}=$ $=\frac{-\chi-1}{-0{,}4832\chi-0{,}1003}$	$1{,}1645-\frac{4{,}4433}{\eta-1}=$ $=\frac{1}{0{,}0988-0{,}3829\chi}$	0

sich in der Zone II oder IV befindet. Die Errechnung der Werte $\psi(r,\vartheta)$, bezw. $\psi'(r',\vartheta')$ dieses Flusses (siehe Bemerkung am Ende des Absatzes 4) ist gerade der umständlichste Teil der ganzen Rechnung.

Die Werte M_γ, N_γ, x_γ, y_γ $(\gamma=1, 5, 6, 7, 8)$, die aus (20) bis (23) und (32) berechnet wurden, sind im Beispiel 2 angegeben. Die Werte x_γ, die die Kugel K betreffen, sind verhältnismäßig klein und die Reihe (41) konvergiert schnell; es genügt, 7 bis 8 Glieder zu berechnen; die Werte P_1' bis P_8' sind in den Funktionentafeln [1] zu finden. Die Werte F_γ' wurden für Winkel $\vartheta=10°$ bis $170°$ mit dem Intervall $10°$ berechnet, worauf für jeden Wert von ϑ mittels (38) der betreffenden Koeffizient η_g

berechnet wurde. Die Werte von η_g für $\vartheta = 0^\circ$ und für $\vartheta = 180^\circ$ (auf Bild 2 entspricht $\vartheta = 0^\circ$ dem Punkt O_1, $\vartheta = 180^\circ$ — dem Punkt O_2) wurden mittels der direkten Methode berechnet. Der Winkel $\vartheta = \vartheta_i$ ist mit Hilfe der Interpolation ermittelt worden. In der Folge berechnen wir für dieselben Winkel die Werte F_γ, wonach wir aus (33) und (62) f finden. Die berechneten Werte η_g und f sind in der Zahlentafel 4 zusammengestellt; Bild 9 stellt die Abhängigkeit zwischen f und ϑ dar.

Zahlentafel 4

Zahlenwerte die Kugel K betreffend

($r=2$; $r'=5$; $D=10$)

ϑ	η_g	χ	f	$\frac{K_{11}}{4\pi\varepsilon_0}$	$\frac{K_{12}}{4\pi\varepsilon_0}$	$\frac{K_{22}}{4\pi\varepsilon_0}$
180°	0,298	−0,0905	0,4758	0,0	0,6778	4,7850
170°	0,299	−0,090	0,4734	0,0001	0,6753	4,7862
160°	0,300	−0,0895	0,4712	0,0004	0,6732	4,7872
150°	0,310	−0,0853	0,4491	0,0037	0,6509	4,7977
140°	0,324	−0,0795	0,4195	0,0120	0,6206	4,8110
130°	0,341	−0,0723	0,3851	0,0257	0,5844	4,8256
120°	0,363	−0,0627	0,3451	0,0541	0,5418	4,8400
110°	0,393	−0,0500	0,2965	0,0971	0,4877	4,8548
100°	0,423	−0,0367	0,2502	0,1499	0,4336	4,8650
90°	0,461	−0,0195	0,2004	0,2201	0,3718	4,8706
80°,3 $= \vartheta_i$	$0{,}503_8$	0	0,1527	0,3031	0,3077	4,8684
80°	0,505	0,00055	0,1514	0,3053	0,3059	4,8683
70°	0,555	0,0238	0,1055	0,4033	0,2371	4,8560
60°	0,608	0,0491	0,0670	0,5063	0,1709	4,8328
50°	0,662	0,0755	0,0375	0,6090	0,1109	4,7994
40°	0,715	0,1020	0,0172	0,7068	0,0604	4,7580
30°	0,761	0,1260	0,00606	0,7891	0,0254	4,7155
20°	0,798	0,1455	0,00126	0,8538	0,0062	4,6772
10°	0,821	0,1575	0,00007	0,8932	0,0004	4,6516
0°	0,829	0,1619	0,0	0,9066	0,0	4,6424

Wenn wir die Berechnung für die Punkte der Zone IV durchführen wollen, so können wir die oben angewendete Methode nicht benützen, weil die für Kugel K' berechneten Zahlen y_γ (siehe Beispiel 2) verhältnismäßig groß sind und die Reihe (41) für G'_γ nur sehr langsam konvergiert. Um dieselbe Genauigkeit wie oben (4 Stellen nach dem Komma) zu erreichen, müßten wir die Werte P_n für $n=1$ bis 16 kennen, diese Angaben aber enthalten die benützten Zahlentafeln [1] nicht. In diesem Fall sind wir deshalb gezwungen, die direkte Methode anzuwenden. Aus (45)

berechnen wir für Winkel $\vartheta' = 0°$ bis $180°$ (Intervall $10°$) die Größen T_0, $T_{\beta i}$, $T'_{\beta i}$, $T_{\alpha i}$, $T'_{\alpha i}$ und ermitteln nach (47) die entsprechenden Werte von η'_g (auf Bild 2 entspricht $\vartheta' = 0°$ dem Punkt O'_1, $\vartheta' = 180°$ — dem Punkt O'_2); den Winkel ϑ'_i bestimmt man durch Interpolation. Die Größen f berechnet man aus (28). Die errechneten Werte η'_g und f sind in der Zahlentafel 5 angegeben; Bild 9 enthält die graphische Darstellung der Abhängigkeit zwischen f und ϑ'.

Da f nunmehr bekannt ist, können wir jetzt die Werte K_{ij} für die Zonen II und IV ermitteln und so die Zahlentafel 6 zusammenstellen,

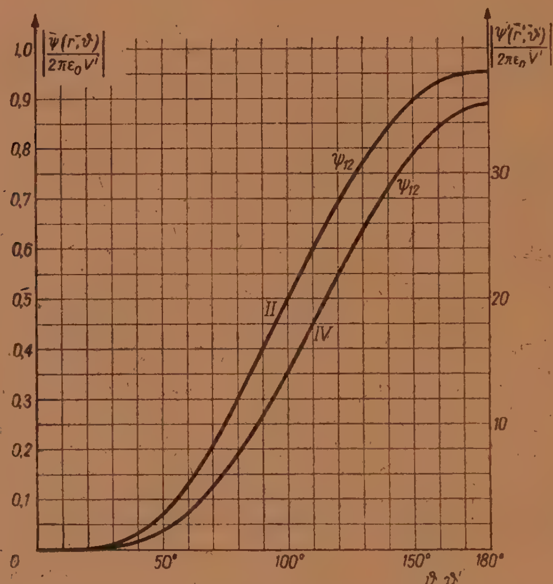


Bild 9. Zahlenbeispiel 3. Feldflüsse ψ_{12} für die Zonen II und IV in Abhängigkeit von den Winkeln ϑ, ϑ'.

die die Werte K_{ij} für sämtliche Fälle Nr. 1 bis 13 enthält. Bild 10 und Bild 11 stellen graphisch K_{ij} als Funktion der Parameter η bezw. χ dar. Bild 12 zeigt die Lage des Gleichgewichtspunktes für verschiedene Werte von η (Gegenstück zu Bild 4).

*

Die Zusammenstellung der allgemeinen Ausdrücke für K_{ij} in den Zahlentafeln 1 und 2 ist der eigentliche Zweck der vorliegenden Arbeit. Die Zahlentafeln 3 und 6 liefern das Beispiel der Anwendung dieser allgemeinen Formeln auf einen konkreten Spezialfall.

Zahlentafel 5

Zahlenwerte die Kugel K' betreffend

$(r=2;\ r'=5;\ D=10)$

ϑ'	η_g'	χ	f	$\frac{K_{11}}{4\pi\varepsilon_0}$	$\frac{K_{12}}{4\pi\varepsilon_0}$	$\frac{K_{22}}{4\pi\varepsilon_0}$
0°	1,278	0,436	0,0	1,4002	0,0	4,1196
10	1,307	0,454	$0{,}0003_5$	1,4201	0,0011	4,0861
20	1,527	0,617	0,0250	1,5324	0,0475	3,8546
30	1,903	0,95	0,1268	1,6328	0,1404	3,5186
40	2,394	1,553	0,3335	1,6856	0,2392	3,1535
50	3,232	3,41	0,8050	1,7020	0,3607	2,6491
60	4,256	13,3	1,5122	$1{,}6824_5$	0,4644	2,1639
$64°{,}5 = \vartheta_i'$	$4{,}815_6$	$\pm\infty$	1,9556	$1{,}6634_5$	0,5125	1,9556
70	5,500	−12,8	2,4978	1,6455	0,5550	1,7009
80	6,751	− 6,41	3,5862	$1{,}6076_5$	0,6236	1,3325
90	8,580	− 4,25	5,2937	1,5587	0,6984	0,9101
100	10,327	− 3,54	7,0292	1,5180	0,7537	0,6112
110	12,127	− 3,15	8,8953	1,4818	0,8067	0,3812
120	13,906	− 2,93	10,8028	1,4508	0,8370	0,2171
130	15,585	− 2,78	12,6503	1,4250	0,8673	0,1094
140°	17,086	− 2,68	14,3361	1,4041	0,8913	0,0473
150°	18,338	− 2,61	15,7617	1,3884	0,9091	0,0149
160	19,281	− 2,58	16,8476	1,3773	0,9216	0,0027
170	19,866	− 2,57	17,5261	1,3705	0,9291	0,000
180	20,064	− 2,54	17,7565	$1{,}3683_5$	0,9313	0,000

Zahlentafel 6

Zahlenwerte von K_{11}, K_{12}, K_{22} in einigen charakteristischen Punkten

$(r=2;\ r'=5;\ D=10)$

Nr	η	χ	f	ϑ, ϑ'	Zone	$K_{11}:4\pi\varepsilon_0$	$K_{12}:4\pi\varepsilon_0$	$K_{22}:4\pi\varepsilon_0$
1	4,8156	$-\infty$	1,9556	$\vartheta'=64°{,}5$	IV	1,6635	0,5125	1,9556
2	20,064	−2,54	17,7565	$\vartheta'=180°$	IV/V	1,3684	0,9313	0
3	$+\infty$	−1,985	—	—	V	1,1469	1,1645	0
4	$-\infty$	−1,985	—	—	V	1,1469	1,1645	0
5	− 3,8742	−1	—	—	V/I	0	2,0761	0
6	− 1	−0,5132	—	—	I	0	1,7379	3,2964
7	0	−0,2075	—	—	I	0	1,1645	4,4433
8	0,298	−0,0905	0,4758	$\vartheta=180°$	I/II	0	0,6776	4,7851
9	0,5038	0	0,1527	$\vartheta=80°{,}3$	II	0,3031	0,3077	4,8684
10	0,829	0,1619	0	$\vartheta=0$	II/III	0,9066	0	4,6424
11	1	0,258	—	—	III	1,1469	0	4,4432
12	1,278	0,436	0	$\vartheta'=0$	III/IV	1,4002	0	4,1196
13	4,8156	$+\infty$	1,9556	$\vartheta'=64°{,}5$	IV	1,6635	0,5125	1,9556

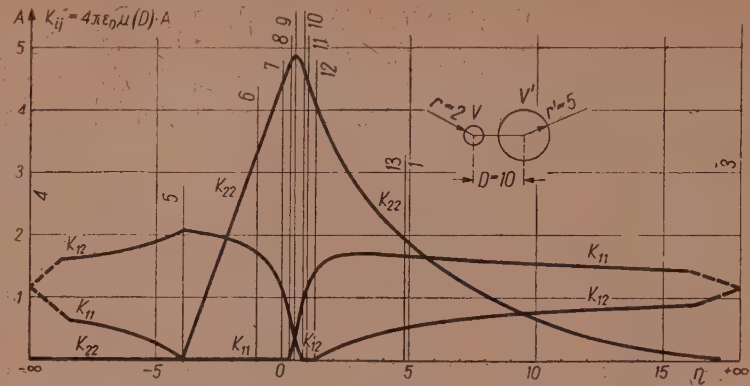


Bild 10. Zahlenbeispiel 3. Teilkapazitäten K_{11}, K_{12}, K_{22} in Abhängigkeit von Spannungsparameter η.

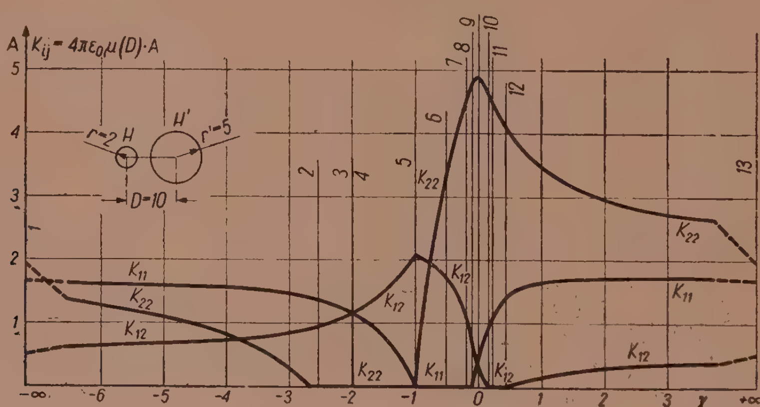


Bild 11. Zahlenbeispiel 3. Teilkapazitäten K_{11}, K_{12}, K_{22} in Abhängigkeit von Landungsparameter χ.

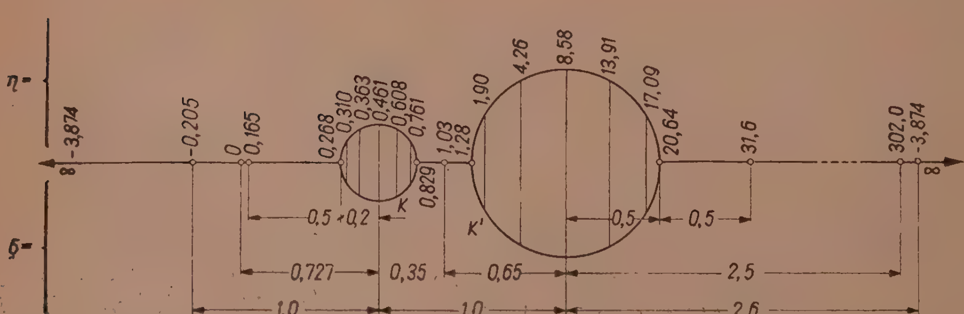


Bild 12. Zahlenbeispiel 3. Lage der Gleichgewichtspunkte bei verschiedenen Werten des Spannungsparameters η.

ANHANG

Gleichgewichtspunkte im axialsymmetrischen elektrostatischen Feld.

Die Gleichung von Laplace lautet in diesem Fall

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) = 0. \tag{67}$$

Nach der bekannten Lösungsmethode setzen wir $V = R(r) \cdot \Theta(\vartheta)$ und erhalten die Gleichung

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) = 0,$$

die in zwei Gleichungen zerfällt:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = K; \qquad \frac{1}{\Theta\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) = -K; \tag{68}$$

dabei ist K eine beliebige Konstante, welcher wir den Wert $K = n(n+1)$ beilegen. Die Lösung der ersten Gleichung (68) ist

$$R = Ar^n + Br^{-n-1}. \tag{69}$$

Die zweite Gleichung (68) kann man in der Form schreiben:

$$(1-z^2)\frac{d^2\Theta}{dz^2} - 2z\frac{d\Theta}{dz} + n(n+1)\Theta = 0, \tag{70}$$

wobei $z = \cos\vartheta$. (70) ist die Gleichung von Legendre mit der Lösung

$$\Theta = CP_n(z) + DQ_n(z) \tag{71}$$

wo P_n und Q_n die Legendre'schen Funktionen erster und zweiter Art bedeuten.

Wir beschränken uns auf positive und ganze Werte von n; dann sind P_n die Legendre'schen Polynome. Im Ausdruck

$$V = C_0 + (Ar^n + Br^{-n-1})[CP_n(\cos\vartheta) + DQ_n(\cos\vartheta)]$$

setzen wir $D = 0$, da $Q_n(\cos\vartheta)$ für $\vartheta \to 0$ zur ∞ strebt. Die allgemeine Lösung der Gleichung (67) kann man in der Form

$$V = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n - B_n r^{-n-1})P_n(\cos\vartheta) \tag{72}$$

schreiben; dabei nehmen wir an, daß alle Ladungen sich im Endlichen befinden. V stellt dann das Potential innerhalb einer Kugel dar, deren Halbmesser so klein ist, daß sie keine Ladungen enthält. Wenn Punkt R, den wir den Gleichgewichtspunkt nennen werden, auf der Symmetrie-

achse liegt, so können wir in ihn den Anfang ($r = 0$) des Koordinatensystems legen. Als Gleichgewichtspunkt k-ter Ordnung definieren wir einen solchen Punkt R, für welchen

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0}\left(\frac{\partial^m V}{\partial r^m}\right)=0 \quad \text{für} \quad m=1,2,3\ldots k \quad \text{und} \\ &\lim_{r\to 0}\left(\frac{\partial^m V}{\partial r^m}\right)\neq 0 \quad ,, \quad m=k+1 \text{ ist;} \end{aligned} \tag{73}$$

Das Potential im Punkt R bezeichnen wir mit V_0. Aus (72) folgt

$$\frac{\partial^m V}{\partial r^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\frac{n!}{(n-m-1)!}r^{n-m}+B'_n r^{-n-m-1}\right)P_n(\cos\vartheta)\,.$$

Auf Grund von (73) müssen wir setzen

$$B'_n=0\,;\quad C_0=V_0 \quad \text{und} \quad A_n=0 \quad \text{für} \quad n\leqslant k\,.$$

Der Ausdruck (72) wird somit zu

$$V=V_0+\sum_{n=k+1}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\vartheta) \tag{74}$$

und für Punkte in der Umgebung von R (r klein) ist

$$V=V_0+r^{k+1}A_{k+1}P_{k+1}(\cos\vartheta)\,. \tag{75}$$

Diese Punkte liegen auf der Aequipotentialfläche V_0, wenn für sie

$$P_{k+1}(\cos\vartheta)=0 \tag{76}$$

ist. Aus (76) finden wir:

für $k=1$: $\quad P_2(\cos\vartheta_1)=\frac{1}{2}(3\cos^2\vartheta_1-1)=0\,;$

$\vartheta_1=54°44'8''\,;\quad 125°15'52''\,.$

für $k=2$: $\quad P_3(\cos\vartheta_2)=\frac{1}{2}(5\cos^3\vartheta_2-3\cos\vartheta_2)=0\,;$

$\vartheta_2=39°13'50''\,;\quad 90°\,;\quad 140°46'10''\,.$

für $k=3$; $\quad P_4(\cos\vartheta_3)=\frac{1}{8}(35\cos^4\vartheta_3-30\cos^2\vartheta_3+3)\,;$

$\vartheta_3=30°33'10''\,;\quad 70°7'20''\,;\quad 109°52'40''\,;\quad 149°26'50''\,.$

Die Aequipotentialflächen sind in der Nähe von R Kreiskegelflächen, deren Achse mit der Feldsymmetrieachse zusammenfällt und deren Oeffnungswinkel $2\vartheta_k$ betragen.

Die Feldstärke $\overline{K}$ ist bei Festsetzungen, die der Gleichung (75) zugrunde liegen:

$$\overline{K} = -1_r \frac{\partial V}{\partial r} - 1_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = -A_{k+1} r^k \left[1_r P_{k+1}(\cos\vartheta) + 1_\vartheta \frac{dP_{k+1}(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \right].$$

In der nächsten Nähe von Punkt R hat K die Radialrichtung 1_r und enthält keine Komponente in der dazu senkrechten Richtung 1_ϑ; es folgt daraus die Bedingung

$$\frac{dP_{k+1}(\cos\vartheta)}{d\vartheta} = 0. \tag{77}$$

Wir erhalten somit

für $k=1$: $6 \sin 2\vartheta' = 0$; $\vartheta' = 0$; 90°;

für $k=2$: $-15 \cos^2\vartheta'' \sin\vartheta'' + 3 \sin\vartheta'' = 0$;

$\vartheta'' = 0$; $63^\circ 26'$; $116^\circ 34'$;

für $k=3$: $-140 \cos^3\vartheta''' \sin\vartheta''' + 60 \cos\vartheta''' \sin\vartheta''' = 0$;

$\vartheta''' = 0$; $40^\circ 53' 40''$; 90°; $139^\circ 6' 20''$.

Bild 13 stellt den Verlauf der Feldlinien und der Spuren der Aequipotentialflächen auf einer Meridianebene in der Umgebung des Punktes R dar für k = 1, 2 und 3.

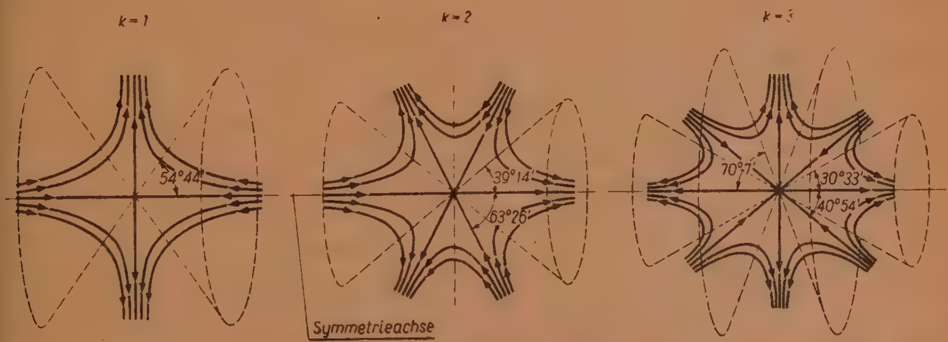


Bild 13. Gleichgewichtspunkte erster, zweiter und dritter Ordnung.

In dem betrachteten Feld zweier geladener Kugeln sind alle Gleichgewichtspunkte, die auf den Geraden EO_2, O_1O_1' und $O_2'E'$ liegen (mit Ausnahme der Punkte O_2, O_1, O_1', O_2' selbst), Gleichgewichtspunkte erster Ordnung; dies ist aus dem Richtungssinn der Feldstärke $\overline{K}$ in den Punkten auf der Achse in der Umgebung von R ersichtlich. In O_2, O_1, O_1', O_2'

entspricht die Aequipotentialebene dem Wert $\vartheta=90°$. Wenn wir in (75) probeweise $k=1$ einsetzen, so erhalten wir

$$V=V_0+r^2A_2P_2(\cos\vartheta);$$

für $\cos\vartheta=0$ ist $P_2(0)=-{}^1/_2$ und es wird

$$V=V_0-\frac{1}{2}A_2r^2,$$

folglich ist die Ebene $\vartheta=90°$ hier keine Aequipotentialebene.

Für $k=2$ erhalten wir

$$V=V_0+r^3A_3P_3(\cos\vartheta)$$

(die Glieder mit höheren Potenzen von r werden wie in (75) nicht berücksichtigt). Bekanntlich ist $P_3(0)=0$ und dem Wert $\vartheta=90°$ entspricht hier die Aequipotentialebene $V=V_0$.

Die Untersuchung der Gleichgewichtspunkte auf den Kugelflächen geht bereits über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus.

Zakład Elektrotechniki
IPPT — PAN.

LITERATURHINWEISE

1. Jahnke E. u. Emde F.: Funktionstafeln, 4. Aufl. 1948.
2. Konorski B.: Archiwum Elektrotechniki, Bd. IV, H. 1, 1955.
3. Konorski B.: *Verallgemeinerung des Coulombschen Grundgesetzes.* Archiv für Elektrotechnik, Bd. 42, H. 7, 1956.
4. Konorski B.: Archiwum Elektrotechniki, Bd. V, H. 2, 1956.
5. Konorski B.: Archiwum Elektrotechniki, Bd. VI, H. 3, 1957.
6. Konorski B.: *Gewisse Eigenschaften des elektrostatischen Feldes zweier Kugeln.* Archiv f. Elektrotechnik, Bd. 43, H. 4, 1957.
7. Konorski B.: Archiwum Elektrotechniki, Bd. VIII, H. 1, 1959.
8. Konorski B.: Archiwum Elektrotechniki, Bd. IX, H. 2, 1960.
9. Konorski B.: Archiwum Elektrotechniki, Bd. V, H. 3, 1956.
10. Konorski B.: Archiwum Elektrotechniki, Bd. VI, H. 3, 1957.
11. Konorski B.: *Ergebnisse neuerer Untersuchungen über das elektrostatische Feld* (Teilkapazitäten). Sonderdruck aus dem Tagungsbericht des III. Internat. Kolloquiums der Hochschule für Elektrotechnik, Ilmenau, 1958.
12. Stobernack H. U.: *Die Coulombschen Anziehungskräfte zwischen kugelförmigen Elektroden.* Archiwum Elektrotechniki, Bd. IX, H. 3, 1960.

POJEMNOŚCI W UKŁADZIE DWÓCH NAŁADOWANYCH KUL

Najprostszym układem geometrycznym elektrod o skończonych wymiarach jest układ dwóch ekscentrycznie w stosunku do siebie położonych kul. Przedmiotem rozważań niniejszej pracy jest pole elektrostatyczne dwóch takich naładowanych kul, w szczególności zaś fizyczne pojemności cząstkowe istniejące w tym układzie. Jak

wykazano w [7] i [11] pojemności takiego układu zależą jednoznacznie nie tylko od parametrów geometrycznych, ale również i od ładunków lub od potencjałów obu kul (albo ściślej, zgodnie z wynikami tej pracy, od stosunku ładunków lub potencjałów).

Cechą jeszcze lepiej charakteryzującą rozważane pola jest położenie punktu równowagi, które może być przyjęte za podstawę ich klasyfikacji. W klasyfikacji tej otrzymuje się 5 rozmaitych stref; w każdej z nich pole ma jakościowo odmienną strukturę.

Pomimo geometrycznej prostoty rozważanego układu, chcąc otrzymać skończone wyrażenia dla strumieni, musimy uciec się do rachunków przybliżonych i ograniczyć się do przypadku, gdy odległość między dwiema kulami nie jest mniejsza od promienia mniejszej z nich. Otrzymujemy wówczas 5 grup wzorów (po jednej grupie dla każdej z 5 stref); każda grupa składa się z 3 wzorów dla K_{11}, K_{12} i K_{22}.

W z o r y p o d s t a w o w e. Różnice, jakie istnieją między pojemnościami cząstkowymi Maxwellowskimi (zależnymi tylko od geometrycznych wymiarów układu) i pojemnościami cząstkowymi fizycznymi zostały przedstawione w pracach [7] i [11]. W niniejszej pracy obliczono fizyczne pojemności cząstkowe najprostszego układu skończonego, jakim jest układ 2 naładowanych kul K, K'. Tzw. ładunki g ł ó w n e Q, q' tych kul określają wzory (1). Pole elektrostatyczne w przestrzeni poza kulami równoważne jest polu wytworzonemu łącznie przez 2 nieskończone ciągi ładunków punktowych C_1) i D_1) (rys. 1a); ładunki C_1) położone są wewnątrz (pustej) powierzchni sferycznej K w punktach O, B_1', B_1, B_2' ... znajdujących się na prostej OO'; odległości tych ładunków od środka O kuli K tworzą ciąg C_2); analogicznie, ładunki D_1) położone są wewnątrz powierzchni K' w punktach O', A_1, A_1', A_2 ... na prostej OO' i ich odległości od środka O' kuli K' tworzą ciąg D_2). W [4] i [5] wykazano, że w przypadku $D \geqslant 2r + r'$ (gdzie $r < r'$) można z dostatecznym przybliżeniem zastąpić 2 nieskończone ciągi C_1), D_1), przez 2 ciągi C_1'), D_1'), z których każdy składa się z 5 ładunków punktowych (rys. 1b); przyjmuje się przy tym, że ładunki powyższe umieszczone są w punktach O, B_1', B_1, B_2', B_2; O', A_1, A_1', A_2, A_2', których odległości od O i O' tworzą ciągi C_2') D_2'). Wielkości Q_n, q_n, α_n, α_n', β_n, β_n' są powiązane zależnościami rekurencyjnymi (6) i (5), przy czym wprowadzono oznaczenia (2), (3), (4) i zakłada się: $n = 1, 2, 3 \ldots$ oraz $\beta_0 = \alpha_0 = 0$; $Q_0 = Q$; $q_0' = q'$. Wynikają stąd związki (7) i (8) wiążące długości występujące w C_2') i D_2') oraz wyrażenia (9) i (10) dla ładunków punktowych z C_1') i D_1'); zastosowano przy tym dalsze oznaczenia (11) i (12).

Sumując szeregi C_1), D_1) otrzymuje się zgodnie z (95), (96), (79), (152) w [2] lub (18) i (19) w [3] wyrażenia (13), przy czym $rT = r'T' = b$. Wielkości S, S', T, T' są funkcjami parametrów ϱ i ϱ'. Jeżeli natomiast zsumować ciągi C_1') i D_1'), to otrzymuje się wyrażenia przybliżone (a); przez porównanie (a) z (13) znajdujemy przybliżone wyrażenia (15) i (16) dla S, S', T, T'. Wartości liczbowe tych funkcji dla rozmaitych wartości ϱ i ϱ' podane są w tablicach 2 i 3 w [3].

S t r u m i e n i e l i n i i p o l a w y c h o d z ą c e z p o w i e r z c h n i k u l wpływają bezpośrednio na wartości cząstkowych pojemności fizycznych K_{11}, K_{12}, K_{22}. W [4] i [5] obliczono strumienie ψ, ψ' wytworzone przez ciągi ładunków C_1') D_1') i przenikające przez czasze kuliste PO_1P i $P'O_1'P'$ kul K i K' (rys. 2). Płaskie kąty środkowe $\sphericalangle POO_1$ i $\sphericalangle P'O'O_1'$ tych czasz oznaczono przez ϑ i ϑ' oraz oznaczono odległość ładunków Q, Q_i', Q_i, q', q_i, q_i' $(i = 1, 2)$ od punktu P przez $l_0, l_{\beta i}', l_{\beta i}, l_0', l_{\alpha i}, l_{\alpha i}'$ od punktu P' zaś przez $t_0, t_{\beta i}', t_{\beta i}, t_0', t_{\alpha i}, t_{\alpha i}'$. Tak więc na przykład zachodzą zależności (17), (18), (19), (i analogiczne). Zgodnie z wzorem (30) w [4] znajdujemy wyrażenie (b) dla strumienia $\psi(r, \vartheta)$ przenikającego przez czaszę POP

kuli K oraz wyrażenie (c) dla strumienia $\psi'(r', \vartheta')$ przenikającego przez czaszę $P'O'P'$ kuli K'. Przy tym strumieniom wychodzącym z powierzchni kuli nadajemy znak +, strumieniom wchodzącym — znak minus. Uwzględniając zależności (a) i (e) wynikające z (7) i (8) oraz (17) do (19) znajdujemy dla ψ, ψ' wyrażenia (f) i (g); wprowadzając zaś oznaczenia (20) do (23) znajdujemy wyrażenia (24) i (25). Operujemy przeważnie nie ładunkami Q, q' lecz (związanymi z nimi wzorami (1)) potencjałami V, V' obu kul. Dogodne jest wprowadzenie parametru $\eta = V/V'$; otrzymujemy wówczas wzory (27) i (28), z których można najdogodniej obliczać $\psi(r, \vartheta)$ i $\psi'(r', \vartheta')$ stosując rozwinięcia poszczególnych wyrazów w szeregi wielomianów Legendre'a. Stosując oznaczenia (29), (30) możemy obliczyć F_γ i G_γ ($\gamma = 1, 5, 6, 7, 8$) z szeregów (31), przy czym liczby x_γ, y_γ znajdujemy z (32). Możemy teraz napisać wzory (27) i (28) w postaci (33) i (34).

Wzory (24) i (25) mogą służyć również do sprawdzenia, czy w obliczeniu współczynników M_γ, N_γ nie zaszła pomyłka. Podstawiając mianowicie do tych wzorów $\vartheta = 0$ (albo $\vartheta' = 0$) powinny współczynniki przy Q i przy q' równać się zeru; podstawiając $\vartheta = \pi$ (lub $\vartheta' = \pi$) powinny współczynniki przy Q i q' równać się S i $-T$ (albo $-T$ i S'). Należy przy tym uwzględnić związki (35) i (36).

Obliczanie strumieni za pomocą wielomianów Legendre'a staje się praktycznie niemożliwe, jeżeli szeregi (31) są wolnozbieżne. Stosujemy wówczas metodę bezpośrednią obliczenia opartą o wzory (27), (28) i (17) — (19). Rachunki są wówczas bardziej kłopotliwe.

K ą t y g r a n i c z n e. Pole ma często strukturę przedstawioną na rys. 3. Wtedy wszystkie linie na powierzchni jednej kuli (na rysunku: kuli K') są liniami wychodzącymi (lub wchodzącymi), na drugiej kuli zaś niektóre linie są liniami wychodzącymi, pozostałe — wchodzącymi. Granicą między tymi dwiema wiązkami linii jest okrąg $P_g P_g$ (na kuli K) o środku na prostej OO'. Kąt środkowy $\vartheta_g = \sphericalangle P_g OO_1$ nazywamy k ą t e m g r a n i c z n y m. Wyznaczenie tego kąta pozwala nam obliczyć strumień ψ_{12} wiązki linii łączących obie kule. Jeżeli oznaczymy przez ψ_ϑ ujemny strumień przenikający przez czaszę kuli K o kącie środkowym ϑ $\vartheta \leqslant \vartheta_g$), to $|\psi_\vartheta$ wzrasta w tym zakresie monotonicznie wraz ze wzrostem kąta ϑ i ma wartość ekstremalną przy spełnieniu warunku (37). Wtenczas $\vartheta = \vartheta_g$ i na podstawie (37) z (33) i (34) wynikają wyrażenia (38) i (39) dla parametrów η_g, η'_g odpowiadających kątom granicznym ϑ_g, ϑ'_g; F'_γ i G'_γ ($\gamma = 1, 5, 6, 7, 8$) oznaczają tu pochodne F_γ i G_γ wzgl. kątów ϑ, ϑ', tzn. szeregi (41). Jeżeli szeregi te są wolnozbieżne, to musimy stosować bezpośrednią metodę obliczania, której punktem wyjściowym jest stwierdzenie, że w punktach $P_g P_g$ (rys. 3) natężenie K pola równa się zeru. Natężenie pola elektrostatycznego wywołanego w punkcie P kuli metalowej przez ładunek punktowy Q położony w odległości A od środka O kuli określony jest zgodnie z [4] wzorem (43), przy czym $\vartheta = \sphericalangle QOP$; $t = QP$. Wprowadzając oznaczenia (44), (45) i stosując superpozycję działania ładunków C'_i) i D'_i) otrzymujemy równania (h), z których możemy obliczyć wyrażenia (46) i (47) dla parametrów η_g (dotyczących punktów P_g na kuli K) lub η'_g (dotyczących punktów P'_g na kuli K'). Znając te wartości możemy w każdym konkretnym przypadku, stosując np. wzory (33) i (34) obliczyć ψ_{12}.

P u n k t y r ó w n o w a g i w polu elektrostatycznym, są to jak wiadomo punkty, w których natężenie pola równa się zeru; znajomość położenia tych punktów ułatwia często narysowanie pola, jak również poznanie jego własności. Szukając punktów równowagi R na prostej OO' rozróżniamy 2 przypadki: R położony jest na promieniach „zewnętrznych" O'_2E' lub O_2E (rys. 2) albo: R położony jest na odcinku „wewnętrznym" $O_1O'_1$. Po wprowadzeniu oznaczeń (48), (49) otrzymujemy z (42) równania (i), (j), z których wynika wyrażenie (50) określające wartość parametru

(znaki górne dotyczą położenia R na promieniach zewnętrznych, znaki dolne — na odcinku wewnętrznym). Każdemu punktowi R na osi OO' odpowiada jednoznacznie określona wartość η i odwrotnie; wyjątek stanowią tu 2 wartości $\eta = \pm\infty$, którym odpowiada tylko jeden punkt R^*_∞ określony przez równanie (51); wartości $\eta = 0$ odpowiada punkt R^*_0 określony przez (52); punktowi R położonemu w ∞ odpowiada wartość $\eta^* = -a'/a$. Można wykazać, że punkt R^*_∞ położony jest na promieniu O'_2E', a punkt R^*_0 — na promieniu O_2E. Rysunek 4 przedstawia położenie punktu R przy rozmaitych wartościach parametru η.

Pojemności cząstkowe K_{11}, K_{12}, K_{22} zależą od strumieni ψ_{11}, ψ_{22} wychodzących z kul K, K' i dążących do ∞ oraz od strumienia ψ_{12} wiązki linii sił łączących obie kule. Na wielkości te duży wpływ wywiera położenie punktu równowagi, które może służyć jako podstawa klasyfikacji pól. Jeżeli z tego punktu widzenia popatrzeć na rys. 4, to możemy wydzielić 5 stref I—V, z których każda warunkuje jakościową strukturę pola: I (R na EO_2); II (R na kuli K); III (R na $O_1O'_1$); IV (R na K'); V (R na O'_2E').

Przez punkt równowagi R nie może przechodzić żadna linia pola i każda prosta przeprowadzona przez R przecina po obu jego stronach (w jego okolicy) linie pola o zwrotach przeciwnych (rys. 5) R ma własność pewnego rodzaju „ekranowania" wiązki pola. W związku z tym, jeżeli R położone jest w strefie I, to nie istnieją linie pola dążące z kuli K do nieskończoności (rys. 6 I) i pole to można przedstawić za pomocą schematu połączeń rys. 7 I; podobnie polu przedstawionemu na rys. 6 II lub III odpowiadają schematy połączeń 7 II lub III (dowód analityczny patrz [10] i [7]). Przyjmując oznaczenia na rys. 7 znajdujemy podstawowe wyrażenia (57) dla fizycznych pojemności cząstkowych, które jednak nie są dogodne do obliczeń i do wykresów graficznych, ponieważ zawierają 4 zmienne niezależne. Wprowadzając parametr $\chi = H/H'$ otrzymujemy zależność (59) między η i χ oraz zależność (60) między V, V' i H, H'. Zamiast $|\psi_{12}|$ wprowadzamy przez (62) nową wielkość f mającą charakter długości; stosujemy poza tym nowe oznaczenie w (wzór (62)). Pomiędzy występującymi wielkościami a, a', b, d, d', w (o charakterze długości) i liczbami g, g', S, S', T, T' zachodzą zależności (k) i (63). Przy wykorzystaniu tych wielkości otrzymuje się wyrażenia dla K_{ij} w strefach I—V zestawione w tablicy 1; każde z nich jest funkcją bądź parametru χ bądź η, przy czym w wyrażenia dotyczące stref II i IV wchodzą jeszcze wielkości f, które można obliczyć za pomocą opisanych wyżej metod. W punktach styku dwóch stref otrzymuje się to samo wyrażenie K_{ij} niezależnie od tego, czy stosuje się wzory dotyczące jednej lub drugiej strefy.

Jeżeli za podstawę klasyfikacji pól przyjąć wartość parametrów χ lub η to możemy uwypuklić szczególnie ważne stany układu, gdy jedna z wielkości V, V', H, H' równa się zeru, albo gdy χ lub η równają się ± 1. Pod tym punktem widzenia zestawiona została tablica 2, przy czym zastosowano następujące oznaczenia: punkt IV/V lub tp. jest punktem granicznym między strefami IV i V; położeniom (m) punktów równowagi odpowiadają wartości (l) parametrów χ i η; f_0 i f_∞ odpowiadają wartościom $\eta = 0$ i $\eta = \infty$; kąty ϑ_i, ϑ'_i odpowiadają stanom influencji kuli K na K' lub odwrotnie. Jak wiadomo z [6], [7] i [9], stan influencji powstaje, gdy $\chi = 0$ lub $\chi = \pm\infty$, stan „uziemienia" jednej z kul — gdy $\eta = 0$ lub $\eta = \pm\infty$. Na odcinku pomiędzy punktem influencji (np. poz. 1 tabl. 2) i stanem uziemienia (np. poz. 3 tabl. 2) położone są punkty odpowiadające stanom anomalii $+-$ (w stanie tym potencjał kuli ma inny znak niż jej ładunek, por. [6] i [9]). Kolejne wartości parametrów χ i η podane w kolumnach 2 i 3 stanowią ciąg wzrastający monotonicznie od $-\infty$ do $+\infty$; pozycje 13 i 1 odpowiadają temu samemu punktowi równowagi. Przy zestawieniu tablic 1 i 2 pomocny jest rys. 8 zawierający schematyczne obrazy pól

w stanach 1 do 13 tablicy 2 i w stanach pośrednich (np. 2/3 oznacza stan pośredn między 2 i 3). Stosunki ilościowe w każdym z tych pól nie zmieniają się przy zmia nie wszystkich zwrotów linii pola na przeciwne (przykład: pierwsze 3 rysunki 1, 1/2 i 2).

Pojemności cząstkowe Maxwellowskie C_{ij} otrzymuje się, jak wiadomo z [7] przez podstawienie do K_{ij} wartości $\eta=0$ i $\eta=\infty$; znajdujemy w ten sposób wyraże nia (64). Ze względów podanych w [8] stosowane często w podręcznikach pojęci pojemności równoważnej K (wzór 65) nie ma również i w przypadku układu dwóch kul fizycznego znaczenia. Można natomiast wprowadzić pojęcie pojemności K^* ener getycznie równoważnej konkretnemu polu: energia całego układu równa się energi kondensatora o pojemności K^*, na który załączone jest napięcie $u=V-V'$.

3 przykłady liczbowe dotyczą przypadku $r=2$, $r'=5$, $D=10$. Rezultaty obli czeń przedstawione są w tablicach 4 i 5 oraz na rys. 9. Tablice 3 i 6 są liczbowym odpowiednikami tablic 1 i 2, rys. 12 przedstawia dane liczbowe do rys. 4. Rys. 1 i 11 przedstawiają wartości K_{ij} w zależności od η i χ.

Głównym celem niniejszej pracy jest przedstawienie ogólnych wzorów dla fizycznych pojemności cząstkowych układu 2 kul (tablica 1 i 2).

W „Dodatku'' przedstawiono zależności ogólne dotyczące punktów równowagi.

ЕМКОСТИ В СИСТЕМЕ ДВУХ ЗАРЯЖЕННЫХ ШАРОВ

Самой простой геометрической схемой электродов ограниченных раз меров является схема состоящая из двух взаимно эксцентричных шаров В настоящей работе рассматривается электростатическое поле двух таких за ряженных шаров, а в частности физические частичные ёмкости, выступающи в этой схеме. В [7] и [11] доказано, что вышеупомянотые емкости такой схемы зависят однозначно не только от геометрических параметров, но и от зарядо или потенциалов обоих шаров (или точнее — по доказанному в этом труде — от взаимного соотношения зарядов или потенциалов).

Свойством еще точнее характеризующим рассматриваемые поля являетс расположение точки равновесия, которое можно принять за основу классифи кации. По этой классификации получается 5 различных стреф; в каждой и них поле имеет качественно различную структуру.

Несмотря на геометрическую простоту рассматриваемой схемы задаваяс целью получения конечных выражений, следует прибегать к приближенны расчетам и остановиться на случае, когда расстояние между обоими шарами н меньше радиуса меньшего шара. В этом случае получим 5 групп формул (п одной группе для каждой из стреф), каждая из групп состоит из трех форму определяющих K_{11}, K_{12}, K_{22}. Формулы эти поданы в таблицах 1 и 2. В „при ложении'' представлены общие зависимости для точек равновесия в поле с осе вой симметрий.

A R C H I W U M E L E K T R O T E C H N I K I

TOM X ZESZYT 1 1961

621.362.26.

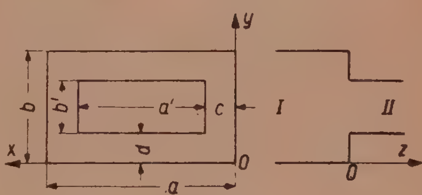
P. SZULKIN

Analiza skokowych nieciągłości falowodów metodą nieskończonych macierzy

Rękopis dostarczono dn. 28. 5. 1960

W pracy podano ścisłe rozwiązanie zagadnienia nieciągłości w falowodzie, polegającej na nagłej zmianie przekroju. Wyznaczenie amplitud wszystkich powstających modów oparto na zastosowaniu macierzy nieskończonych. Metodę tę, jak się wydaje można zastosować do innych rodzajów nieciągłości.

Analizę skokowych nieciągłości rozpoczniemy od przypadku nagłego zawężenia przekroju falowodu prostokątnego (rys. 1). Sposób postępowania przy obliczaniu wpływu takiej nieciągłości jest następujący: Wyrażamy pola elektromagnetyczne w obu częściach falowodu za pomocą sum nieskończonej liczby modów falowodowych, rozchodzących się zarówno w kierunku dodatnim jak i ujemnym. Z każdym modem i kierunkiem związany jest pewien współczynnik modowy, który wskazuje względną amplitudę modu. Na styku obu części falowodu dopasowujemy



Rys. 1.

składowe pola w otworze łączącym obie części. Na powierzchni metalowej styku zakładamy składowe pola E_x, E_y i H_z równe zeru.

Powyższe warunki brzegowe prowadzą do równań zawierających zmienne x i y, które można wyeliminować za pomocą metody szeregów Fouriera. W rezultacie otrzymuje się układ nieskończonej liczby równań liniowych dla współczynników modowych. Następnie korzystamy z postaci macierzowej tego układu równań, traktując współczynniki modowe jako macierze kolumnowe. Pozostaje wówczas tylko rozwiązać równania macierzowe względem szukanej macierzy kolumnowej współczynnika modowego z dodatkowym uwzględnieniem innych warunków brzegowych niż te, które narzuca nieciągłość.

Składowe pola elektrycznego F_x w obu częściach falowodu można napisać w postaci (patrz Dodatek 2)

$$E_{xI}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{j\omega\mu}{k_{m,n}^2}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left[a_{m,n}\,e^{-\gamma_{m,n}z}+b_{m,n}\,e^{+\gamma_{m,n}z}\right]-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\gamma_{m,n}}{k_{m,n}^2}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left[c_{m,n}\,e^{-\gamma_{m,n}z}+d_{m,n}\,e^{+\gamma_{m,n}z}\right]\right\}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{1}$$

$$E_{xII}=\sum_{p,q=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{j\omega\mu}{k_{p,q}^{'2}}\right)\left(\frac{q\pi}{b'}\right)\left[a'_{p,q}\,e^{-\gamma'_{p,q}z}+b'_{p,q}\,e^{+\gamma'_{p,q}z}\right]-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\gamma'_{p,q}}{k_{p,q}^{'2}}\right)\left(\frac{p\pi}{a'}\right)\left[c'_{p,q}\,e^{-\gamma'_{p,q}z}+d'_{p,q}\,e^{+\gamma'_{p,q}z}\right]\right\}\cos\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right]\sin\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right], \tag{2}$$

gdzie

$$k_{m,n}^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2; \qquad k_{p,q}^{'2}=\left(\frac{p\pi}{a'}\right)^2+\left(\frac{q\pi}{b'}\right)^2 \tag{3}$$

$$\gamma_{m,n}=\sqrt{k_{m,n}^2-\omega^2\mu\varepsilon}; \qquad \gamma'_{m,n}=\sqrt{k_{p,q}^{'2}-\omega^2\mu\varepsilon} \tag{4}$$

$a_{m,n}$ — współczynnik modowy $TE_{m,n}$ w dodatnim kierunku z;
$b_{m,n}$ — współczynnik modowy $TE_{m,n}$ w ujemnym kierunku z;
$c_{m,n}$ — współczynnik modowy $TM_{m,n}$ w dodatnim kierunku z;
$d_{m,n}$ — współczynnik modowy $TM_{m,n}$ w ujemnym kierunku z.

Podobne znaczenie mają odpowiednie wielkości $a'_{p,q}$, $b'_{p,q}$ i $d'_{p,q}$ dla fal w drugiej części falowodu.

Wyrażenia dla pozostałych składowych pola znajduje się bez trudu, korzystając z wzorów wyprowadzonych w Dodatku 2.

W płaszczyźnie nieciągłości składowa styczna pola elektrycznego i składowa normalna pola magnetycznego są równe zeru na ściance metalowej. Inaczej mówiąc, w części I falowodu, dla $z=0$, $E_x=E_y=$ $=H_z=0$, gdy przynajmniej jeden z następujących warunków jest spełniony: $0\leqslant x\leqslant c$, $c+a'\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant d$ lub wreszcie $d+b'\leqslant y\leqslant b$. Ciągłość pola wymaga, aby odpowiednie składowe pola obu części falowodu były równe na styku. Oznacza to, że odpowiednie składowe pola muszą być równe dla $z=0$, $c\leqslant x\leqslant c+a'$ i $d\leqslant y\leqslant d+b'$. Te warunki brzegowe, zastosowane do E_x, prowadzą do równania

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{j\omega\mu}{k_{m,n}^2}\right)\left(\frac{n\pi}{h}\right)(a_{m,n}+b_{m,n})-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\gamma_{m,n}}{k_{m,n}^2}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)(c_{m,n}=d_{m,n})\right\}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)=$$

$$=0\ (\text{dla } 0\leqslant x\leqslant c,\ c+a'\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant d,\ d+b'\leqslant y\leqslant b)$$

$$=\sum_{p,q=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{j\omega\mu}{k_{p,q}^{2}}\right)\left(\frac{q\pi}{b'}\right)(a'_{p,q}+b'_{p,q})-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\gamma'_{p,q}}{k'^{2}_{p,q}}\right)\left(\frac{p\pi}{a'}\right)(c'_{p,q}+d'_{p,q})\right\}\cos\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right]\sin\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right]$$

$$(\text{dla } c\leqslant x\leqslant c+a',\ d\leqslant y\leqslant d+b') \tag{5}$$

W podobny sposób otrzymujemy następujące równania, wynikające z zastosowania warunków brzegowych do składowych E_y, E_z, H_x, H_y i H_z

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{j\omega\mu}{k_{p,q}^{2}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)(a_{m,n}+b_{m,n})+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\gamma_{m,n}}{k_{m,n}^{2}}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)(c_{m,n}+d_{m,n})\right\}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)=$$

$$=0\ (\text{dla } 0\leqslant x\leqslant c,\ c+a'\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant d,\ d+b'\leqslant y\leqslant b)$$

$$=\sum_{p,q=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{j\omega\mu}{k'^{2}_{p,q}}\right)\left(\frac{p\pi}{a'}\right)(a'_{p,q}+b'_{p,q})+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\gamma'_{p,q}}{k'^{2}_{p,q}}\right)\left(\frac{q\pi}{b'}\right)(c'_{p,q}+d'_{p,q})\right\}\sin\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right]\cos\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right]$$

$$(\text{dla } c\leqslant x\leqslant c+a',\ d\leqslant y\leqslant d+b') \tag{6}$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}(c_{m,n}-d_{m,n})\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)=$$

$$=\sum_{p,q=0}^{\infty}(c'_{p,q}-d'_{p,q})\sin\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right]\sin\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right] \tag{7}$$

$$(\text{dla } c\leqslant y\leqslant c+a',\ d\leqslant y\leqslant d+b')$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{\gamma_{m,n}}{k_{m,n}^{2}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)(a_{m,n}-b_{m,n})+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{j\omega\varepsilon}{k_{m,n}^{2}}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)(c_{m,n}-d_{m,n})\right\}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)=$$

$$=\sum_{p,q=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{\gamma'_{p,q}}{k'^{2}_{p,q}}\right)\left(\frac{p\pi}{a}\right)(a'_{p,q}-b'_{p,q})+\right.$$

$$+\left(\frac{j\omega\varepsilon}{k'^2_{p,q}}\right)\left(\frac{q\pi}{b'}\right)(c'_{p,q}-d'_{p,q})\Big\}\sin\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right]\cos\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right] \tag{8}$$

(dla $c\leqslant x\leqslant c+a'$, $d\leqslant y\leqslant d+b'$)

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\Big\{\left(\frac{\gamma_{m,n}}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{n\pi}{a}\right)(a_{m,n}-b_{m,n})-$$

$$-\left(\frac{j\omega\varepsilon}{k^2_{w,n}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)(c_{m,n}-d_{m,n})\Big\}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)=$$

$$=\sum_{p,q=0}^{\infty}\Big\{\left(\frac{\gamma'_{p,q}}{k'^2_{p,q}}\right)\left(\frac{q\pi}{b'}\right)(a'_{p,q}-b'_{p,q})-$$

$$-\left(\frac{j\omega\varepsilon}{k'^2_{p,q}}\right)\left(\frac{p\pi}{a'}\right)(c'_{p,q}-d'_{p,q})\Big\}\cos\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right]\sin\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right] \tag{9}$$

(dla $c\leqslant x\leqslant c+a'$, $d\leqslant y\leqslant d+b'$)

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}(a_{m,n}+b_{m,n})\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)=$$

$=0$ (dla $0\leqslant x\leqslant c$, $c+a'\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant d$ lub $d+b'\leqslant y\leqslant b$)

$$=\sum_{p,q=0}^{\infty}(a'_{p,q}+b_{p,q})\cos\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right]\cos\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right] \tag{10}$$

(dla $c\leqslant x\leqslant c+a'$, $d\leqslant y\leqslant d+b'$)

Warto podkreślić, że w powyższych równaniach stanowiących podstawę dla dalszej analizy nie występują explicite E_z, H_x i H_y na ściance nieciągłości. Ponieważ H_y jest proporcjonalne do składowej J_x prądu w ściance H_x zaś jest proporcjonalne do J_y, oznacza to pominięcie prądu płynącego w nieciągłości. Jak wiadomo [2] istnieją metody badania wpływu nieciągłości oparte właśnie na istnieniu tych prądów powierzchniowych.

Dalszym krokiem w rozważaniach będzie usunięcie z wyprowadzonych równań zmiennych przestrzennych x i y. W tym celu zastosujemy metodę szeregów Fouriera. Przypominamy, że

$$\int_0^a\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right)dx=a \qquad (\text{jeżeli} \quad m=p=0)$$

$$= \frac{a}{2} \quad (\text{jeżeli} \quad m = p \neq 0) \tag{11}$$

$$= 0 \quad (\text{jeżeli} \quad m \neq p)$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx = 0 \quad (\text{jeżeli} \quad m = p = 0)$$

$$= \frac{a}{2} \quad (\text{jeżeli} \quad m = p \neq 0) \tag{12}$$

$$= 0 \quad (\text{jeżeli} \quad m \neq p)$$

$$\int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx = 0 \tag{13}$$

gdzie m i p są całkowite.

Mnożąc obie strony równania (5) przez $\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ równanie (6) przez $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$, równanie (10) przez $\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ i całkując je w przedziałach $0 < x < a$, $0 < y < b$, otrzymamy

$$\left(\frac{j\omega\mu}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)(a_{m,n}+b_{m,n}) - \left(\frac{\gamma_{m,n}}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)(c_{m,n}+d_{m,n}) =$$

$$= \frac{4}{ab}\sum_{p,q=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{j\omega\mu}{k'^2_{p,q}}\right)\left(\frac{q\pi}{b'}\right)(a'_{p,q}+b'_{p,q}) - \left(\frac{\gamma'_{p,q}}{k'^2_{p,q}}\right)\left(\frac{p\pi}{a'}\right)(c'_{p,q}+d'_{p,q})\right\} A_{m,p}D_{n,q} \tag{14}$$

$$\left(\frac{j\omega\mu}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)(a_{m,n}+b_{m,n}) + \left(\frac{\gamma_{m,n}}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)(c_{m,n}+d_{m,n}) =$$

$$= \frac{4}{ab}\sum_{p,q=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{j\omega\mu}{k'^2_{p,q}}\right)\left(\frac{p\pi}{a'}\right)(a'_{p,q}+b'_{p,q}) + \left(\frac{\gamma'_{p,q}}{k'^2_{p,q}}\right)\left(\frac{q\pi}{b'}\right)(c'_{p,q}+d_{p,q})\right\} B_{m,p}C_{n,q} \tag{15}$$

$$a_{m,n}+b_{m,n} = \frac{4}{ab}\sum_{p,q=0}^{\infty}(a'_{p,q}+b'_{p,q}) A_{m,p}C_{n,q} \tag{16}$$

gdzie:

$$A_{0p} = \frac{1}{2}\int_c^{c+a'} \cos\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right] dx \tag{17}$$

$$A_{m,p} = \int_c^{c+a'} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right] dx \quad (m \neq 0) \tag{18}$$

$$B_{m,p} = \int_{c}^{c+a'} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right] dx \tag{19}$$

$$C_{0,q} = \frac{\gamma}{2} \int_{d}^{d+b'} \cos\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right] dy \tag{20}$$

$$C_{n,q} = \int_{d}^{d+b'} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right] dy \qquad (n \neq 0) \tag{21}$$

$$D_{n,q} = \int_{d}^{d+b'} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right] dy \tag{22}$$

Jeżeli teraz pomnożymy równanie (7) przez $\sin\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right] \sin\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right]$, równanie (8) przez $\sin\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right] \cos\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right]$ i równanie (9) przez $\cos\left[\frac{p\pi(x-c)}{a'}\right] \sin\left[\frac{q\pi(y-d)}{b'}\right]$ i scałkujemy je w przedziałach $c \leqslant x \leqslant c+a$ i $d \leqslant y \leqslant d+b'$, otrzymamy następujące zależności

$$c'_{p,q} - d'_{p,q} = \frac{4}{a'b'} \sum_{m,n=0}^{\infty} (c_{m,n} - d_{m,n}) B_{m,p} D_{n,q} \tag{23}$$

$$\left(\frac{\gamma'_{p,q}}{k'^2_{p,q}}\right)\left(\frac{p\pi}{a'}\right)(a'_{p,q} - b'_{p,q}) + \left(\frac{j\omega\varepsilon}{k'^2_{p,q}}\right)\left(\frac{q\pi}{b'}\right)(c'_{p,q} - d'_{p,q}) =$$

$$= \frac{4}{a'b'} \sum_{m,n=0}^{\infty} \left\{\left(\frac{\gamma_{m,n}}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)(a_{m,n} - b_{m,n}) + \left(\frac{j\omega\varepsilon}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)(c_{m,n} - d_{m,n})\right\} B_{m,p} C_{n,q} \tag{24}$$

$$\left(\frac{\gamma'_{p,q}}{k'^2_{p,q}}\right)\left(\frac{q\pi}{b'}\right)(a'_{p,q} - b'_{p,q}) - \left(\frac{j\omega\varepsilon}{k'^2_{p,q}}\right)\left(\frac{p\pi}{a'}\right)(c'_{p,q} - d'_{p,q}) =$$

$$= \frac{4}{a'b'} \sum_{m,n=0}^{\infty} \left\{\left(\frac{\gamma_{m,n}}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)(a_{m,n} - b_{m,n}) - \left(\frac{j\omega\varepsilon}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)(c_{m,n} - d_{m,n})\right\} A_{m,p} D_{n,q} \tag{25}$$

Zakładając

$$\xi_{m,p} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{p\pi}{a'}\right)^2 \tag{26}$$

$$\zeta_{n,q} = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{q\pi}{b'}\right)^2 \tag{27}$$

możemy korzystając z równań 17 — 22 napisać $A_{m,p}$, $B_{m,p}$, $C_{n,q}$ i $D_{n,q}$ w postaci [3]

$$A_{m,p} = \frac{m\pi}{a\xi_{m,p}} \left[(-1)^p \sin\left(\frac{m\pi(c+a')}{a}\right) - \sin\left(\frac{m\pi c}{a}\right)\right] \quad (\text{dla } \xi_{m,p} \neq 0) \tag{28}$$

$$A_{m,p} = \frac{a'}{2} \cos\left(\frac{m\pi c}{a}\right) \quad (\text{dla } \xi_{m,p} \neq 0) \tag{29}$$

$$B_{0,0} = 0 \tag{30}$$

$$B_{m,p} = \frac{p\pi}{a'\xi_{m,p}} \left\{(-1)^p \sin\left[\frac{m\pi(c+a')}{a}\right] - \sin\left(\frac{m\pi c}{a}\right)\right\} \quad (\text{dla } \xi_{m,p} \neq 0) \tag{31}$$

$$B_{m,p} = \frac{a'}{2} \cos\left(\frac{m\pi c}{a}\right) \quad (\text{dla } m \neq 0,\ \xi_{m,p} = 0), \tag{32}$$

$$C_{n,q} = \frac{n\pi}{b\xi_{n,q}} \left\{(-1)^q \sin\left[\frac{n\pi(d+b')}{b}\right] - \sin\left(\frac{n\pi d}{b}\right)\right\} \quad (\text{dla } \zeta_{n,q} \neq 0, \tag{23}$$

$$C_{n,q} = \frac{b'}{2} \cos\left(\frac{n\pi d}{b}\right) \quad (\text{dla } \zeta_{n,q} = 0) \tag{34}$$

$$D_{n,q} = \frac{q\pi}{b'\zeta_{n,q}} \left\{(-1)^2 \sin\left[\frac{n\pi(d+b')}{b}\right] - \sin\left(\frac{n\pi d}{b}\right)\right\} \quad (\text{dla } \zeta_{n,q} \neq 0), \tag{35}$$

$$D_{n,q} = \frac{b'}{2} \cos\left(\frac{n\pi d}{b}\right) \quad (\text{dla } n \neq 0,\ \zeta_{n,q} \neq 0), \tag{36}$$

$$D_{0,0} = 0. \tag{37}$$

Z powyższych równań wynika, że

$$\frac{p\pi}{a'} A_{m,p} = \frac{m\pi}{a} B_{m,p} \tag{38}$$

i

$$\frac{q\pi}{b'} C_{n,q} = \frac{n\pi}{b} D_{n,q} \tag{39}$$

Uwzględniając te zależności łatwo się przekonać, że równanie (16) pomnożone przez $j\omega\mu$ jest równoważne sumie równania (14) pomnożonego przez $\frac{n\pi}{b}$ i równania (15) pomnożonego przez $\frac{m\pi}{a}$. Podobnie równanie (23) pomnożone przez $j\omega\varepsilon$ jest równoważne różnicy równania (24) pomnożonego przez $\frac{q\pi}{b'}$ i równania (25) pomnożonego przez $\frac{p\pi}{a'}$.

Z tego wynika, że z równań (14), (15), (16), (23), (24) i (25) pozostaje tylko cztery niezależne układy równań, z których każdy oczywiście reprezentuje podwójnie nieskończoną ilość równań.

Jako pierwsze dwa niezależne układy równań obliczamy równania (16) i (23) ze względu na ich względną prostotę. Pozostałe dwa tworzymy jako:

1) różnicę równania (15), pomnożonego przez $\frac{n\pi}{b}$ i równania (14) pomnożonego przez $\frac{m\pi}{a}$,

2) sumę równania (24) pomnożonego przez $\frac{p\pi}{a'}$ i równania (25) pomnożonego przez $\frac{q\pi}{b'}$,

Daje to

$$\gamma_{m,n}(c_{m,n}+d_{m,n})=\frac{4}{ab}\sum_{p,q=0}^{\infty}\left[\left(\frac{j\omega\mu}{k'^2_{p,q}}\right)(a'_{p,q}+b'_{p,q})F_{m,p;n,q})+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\gamma'_{p,q}k^2_{m,n}}{k'^2_{p,q}}\right)(c'_{p,q}+d'_{p,q})B_{m,p}D_{n,q}\right], \tag{40}$$

$$\gamma'_{p,q}(a'_{p,q}-b'_{p,q})=\frac{4}{a'b'}\sum_{m,n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\gamma_{m,n}k'^2_{p,q}}{k^2_{m,n}}\right)(a_{m,n}-b_{m,n})A_{m,p}C_{n,q}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{j\omega\varepsilon}{k^2_{m,n}}\right)(c_{m,n}-d_{m,n})F_{m,p;n,q}\right], \tag{41}$$

gdzie

$$F_{m,p;n,q}=\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left(\frac{p\pi}{a'}\right)B_{m,p}C_{n,q}-\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{q\pi}{b'}\right)A_{m,p}D_{n,q}. \tag{42}$$

Wprowadzimy nowe pojedyncze indeksy h i q zamiast podwójnych (m, n) i (p, q) oraz przyjmiemy

$$Q_{h,g}=A_{m,n}C_{n,q} \tag{43}$$

$$R_{h,g}=B_{m,p}D_{n,q} \tag{44}$$

$$S_{h,g}=F_{m,p;n,q}. \tag{45}$$

Wówczas równania (16), (23), (40) i (41) przybierają postać

$$a_h+b_h=\frac{4}{ab}\sum_{g=1}^{\infty}Q_{h,g}(a'_g+b'_g) \tag{46}$$

$$c'_g - d_g = \frac{4}{a'b'} \sum_{h=1}^{\infty} R_{h,g}(c_h - d_h), \tag{47}$$

$$\gamma_h(c_h + d_h) = \frac{4}{ab} \sum_{g=1}^{\infty} \left[\left(\frac{j\omega\mu}{k'^2_g} \right) S_{h,g}(a'_g + b'_g) + \left(\frac{\gamma'_g k_h^2}{k'^2_g} \right) R_{h,g}(c'_g + d'_g) \right], \tag{48}$$

$$\gamma'_g(a'_g + b'_g) = \frac{4}{a'b'} \sum_{h=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\gamma_h k'^2_g}{k_h^2} \right) Q_{h,g}(a_h - b_h) + \left(\frac{j\omega\varepsilon}{k_h^2} \right) S_{h,g}(c_h - d_h) \right]. \tag{49}$$

Możemy już teraz przepisać równania (46) — (49) w postaci macierzowej (patrz Dodatek 1)

$$[a] + [b] = [G] \quad [[a'] + [b']] \tag{50}$$

$$[c] + [d] = [H] \quad [[a'] + [b']] + [K] \quad [[c'] + [d']] \tag{51}$$

$$[a'] - [b'] = [M] \quad [[a] - [b]] + [N] \quad [[c] - [d]] \tag{52}$$

$$[c'] - [d'] = [P] \quad [[c] - [d]] \tag{53}$$

gdzie

$$[G] = \frac{4}{ab} [Q] \tag{54}$$

$$[H] = \frac{4}{ab} j\omega\mu \, [\gamma]^{-1} [S] \, [k'^2]^{-1} \tag{55}$$

$$[K] = \frac{4}{ab} [k^2] \, [\gamma]^{-1} [R] \, [k'^2]^{-1} \tag{56}$$

$$[M] = \frac{4}{a'b'} [k'^2] \, [\gamma']^{-1} [Q]' \, [\gamma] \, [k^2]^{-1} \tag{57}$$

$$[N] = \frac{4}{a'b'} j\omega\varepsilon \, [\gamma']^{-1} [S]' \, [k^2]^{-1} \tag{58}$$

$$[P] = \frac{4}{a'b'} [R] \tag{59}$$

$[a]$, $[b]$, $[c]$, $[d]$, $[a']$, $[b']$, $[c']$ i $[d']$ są macierzami kolumnowymi, podczas gdy $[k^2]$ $[k'^2]$ $[\gamma]$ i $[\gamma']$ są macierzami diagonalnymi. Korzystając z metody podanej w Dodatku 1, można cztery równania macierzowe (50) — (53) sprowadzić do dwóch. W tym celu oznaczmy przez $[\alpha]$ macierz kolumnową otrzymaną przez przeplatanie macierzy $[a]$ i $[c]$.

Podobnie tworzymy macierz $[\beta]$ dla $[b]$ i $[d]$, macierz dla $[a']$ i $[c']$ i macierz $[\gamma]$ dla $[b']$ i $[d']$. Kładąc dalej

$$[W]=\begin{bmatrix}[G] & [O]\\ [H] & [K]\end{bmatrix} \tag{60}$$

$$[V]=\begin{bmatrix}[M] & [N]\\ [O] & [P]\end{bmatrix} \tag{61}$$

możemy zamiast równań (50)—(53) napisać

$$[\alpha]+[\beta]=[W]\,[[\eta]+[\gamma]] \tag{62}$$

$$[\eta]-[\gamma]=[V]\,[[\alpha]+[\beta]]. \tag{63}$$

Te dwa ostatnie równania przedstawiają ostatecznie w postaci macierzowej warunki brzegowe, które muszą być spełnione w płaszczyźnie nieciągłości. Ponieważ mamy cztery macierze kolumnowe, równań zaś jest tylko dwa, należy je uzupełnić jeszcze dwoma zbiorami warunków brzegowych. Zakładając, że część I falowodu jest zasilana przez źródło, część II zaś kończy się znanym obciążeniem, możemy przyjąć iż $[\alpha]$ jest znane, a $[\gamma]=[T][\eta]$, gdzie $[T]$ jest również znane. W tych warunkach równania (62) i (63) można napisać jako

$$[\alpha]+[\beta]=[W]\,[[1]+[T]]\,[\eta], \tag{64}$$

$$[1]-[T]\,[\eta]=[V]\,[[\alpha]-[\beta]]. \tag{65}$$

Eliminując z tych równań $[\beta]$, otrzymujemy

$$[\eta]=2\,[[1]-[T]+[V]\,[W]]\,[[1]+[T]]^{-1}\,[V]\,[\alpha]. \tag{66}$$

Macierzy $[\beta]$ można nadać postać

$$[\beta]=-[[1]+[W]\,[U]\,[V]]^{-1}\,[[1]-[W]\,[U]\,[V]]\,[\alpha], \tag{67}$$

gdzie

$$[U]=[[1]+[T]]\,[[1]-[T]]^{-1}. \tag{68}$$

Pisząc równanie dla odbitego napięcia V_2 od obciążenia w linii przesyłowej [3]

$$V_2=-\frac{1-Z_k}{1+Z_k}V_1, \tag{69}$$

gdzie

V_1 — napięcie padające,

Z_k — zaś normowana impedancja obciążenia,

widzimy, że jest ono podobne do równania (67). Pozwala to uogólnić pojęcie normowanej impedancji i nazwać macierz

$[Z]=[W]\;[U]\;[V]$

normowaną macierzą impedancji nieciągłości skokowej falowodu. Równanie (68) jest analogiem równania

$$Z_k = \frac{1+\Gamma_v}{1-\Gamma_v}, \tag{70}$$

gdzie Γ_v jest współczynnikiem odbicia napięciowego, wynoszącym

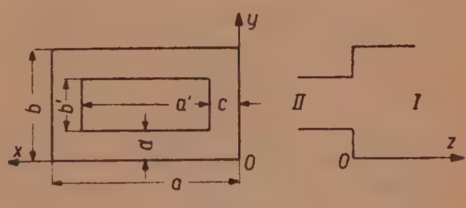
$$\Gamma_v = \frac{V_2}{V_1}. \tag{71}$$

Możemy więc $[U]$ nazwać normowaną macierzą impedancji dla obciążenia części II falowodu.

Ponieważ normowaną macierz impedancji nieciągłości skokowej w falowodzie jest $[Z] = [W]\,[U]\,[V]$, układ równoważny dla nieciągłości składa się z idealnego transformatora ze stałą impedancją szeregowo połączoną z impedancją, reprezentującą obciążenie części II falowodu.

Równania (66) i (67) są całkowicie ścisłe i mogą służyć do wyznaczania wpływu nieciągłości z dowolnym stopniem dokładności. Są one jednak może zbyt skomplikowane dla większości zagadnień praktycznych i należy rozważyć problem możliwości aproksymacyjnych.

Rozpatrzmy jeszcze nieciągłość skokową w falowodzie, pokazaną na rys. 2. Oznaczając lewą część falowodu przez II, prawą zaś przez I, możemy korzystać z analizy, przeprowadzonej dla poprzedniego wypadku.



Rys. 2.

Jeżeli źródło zasila część II falowodu, część I zaś kończy się obciążeniem o znanych własnościach, możemy uważać, że $[\eta]$ jest znane, natomiast $[\beta]=[L][\alpha]$, gdzie $[L]$ jest również znane. W tych warunkach możemy równania (62) i (63) napisać jako

$$[[1] + [L]]\,[\alpha] = [W]\,[[\eta] + [\gamma]] \tag{72}$$

$$[\eta] - [\gamma] = [V]\,[[1] - [L]]\,[\alpha]\,. \tag{73}$$

Eliminując z tych równań $[\alpha]$ otrzymamy

$$[\gamma] = [[1] + [V]\,[X]\,[W]]^{-1}\,[[1] - [V]\,[X]\,[W]]\,[\eta]\,, \tag{74}$$

gdzie

$$[X] = [[1] - [L]]\,[[1] + [L]]\,. \tag{75}$$

Podobnie, eliminując z równań (72) i (73) macierz $[\gamma]$ mamy

$$[\alpha] = 2\,[[1] + [L] + [W]\,[V]\,[[1] - [L]]^{-1}\,[W]\,[\eta]\,. \tag{76}$$

Porównując równanie (74) ze znaną zależnością dla linii przesyłowej

$$V_2 = \frac{1-Y_k}{1+Y_k} V_1 , \tag{77}$$

gdzie

Y_k — normowana admitancja obciążenia,

widzimy, że uogólniając pojęcie normowanej admitancji możemy nazwać $[Y] = [V]\,[X]\,[W]$ normowaną macierzą admitancji dla skokowej nieciągłości falowodu. Równanie (75) jest podobne do równania

$$Y_k = \frac{1-\Gamma_v}{1+\Gamma_v} , \tag{78}$$

co pozwala nazwać $[X]$ normowaną macierzą admitancji dla obciążenia części I falowodu.

Uwzględniając postać normowanej macierzy admitancji nieciągłości falowodu $[Y] = [V]\,[X]\,[W]$, można układ równoważny dla nieciągłości przedstawić jako idealny transformator ze stałą admitancją połączoną równolegle do obciążenia części I falowodu.

Na zakończenie rozpatrzymy jeszcze przypadek, gdy nieciągłość falowodowa z rys. 1 mieści się nie w płaszczyźnie $z = 0$, lecz $z = \psi$ co, można również potraktować jako przesunięcie płaszczyzny $z = 0$. Należy wówczas odpowiednie wielkości zmienić w następujący sposób

$$\begin{array}{ll} a_{m,n} \longrightarrow a_{m,n} e^{-\gamma_{m,n}\psi} & b_{m,n} \longrightarrow b_{m,n} e^{\gamma_{m,n}\psi} \\ c_{m,n} \longrightarrow c_{m,n} e^{-\gamma_{m,n}\psi} & d_{m,n} \longrightarrow d_{m,n} e^{\gamma_{m,n}\psi} \\ a'_{p,q} \longrightarrow a'_{p,q} e^{-\gamma_{p,q}\psi} & b'_{p,q} \longrightarrow b'_{p,q} e^{\gamma_{p,q}\psi} \\ c'_{p,q} \longrightarrow c'_{p,q} e^{-\gamma_{p,q}\psi} & d'_{p,q} \longrightarrow d'_{p,q} e^{\gamma_{p,q}\psi} \end{array}$$

W równaniach (62) i (63) macierz $[\alpha]$ należy zastąpić przez $[e^{-\gamma\psi}]\,[\alpha]$, macierz $[\beta]$ przez $[e^{\gamma\psi}]\,[\beta]$, macierz $[\eta]$ przez $[e^{-\gamma'\psi}]\,[\eta]$ i wreszcie $[\gamma]$ przez $[e^{\gamma'\psi}]\,[\gamma]$ gdzie $[e^{-\gamma\psi}]$ jest macierzą diagonalną, określoną jako

$$e^{-\gamma\psi}\big|_{2w,2w} = e^{-\gamma\psi}\big|_{2w-1,2w-1} = e^{-\gamma\psi}\big|_{w} . \tag{79}$$

W podobny sposób są określane macierze diagonalne $[e^{\gamma\psi}]$, $[e^{-\gamma'\psi}]$ i $[e^{\gamma'\psi}]$. W tych warunkach równania (64) i (65) przybierają postać

$$[e^{-\gamma\psi}]\,[\alpha] + [e^{\gamma\psi}]\,[\beta] = [W]\,[[1] + [\overline{T}]]\,[e^{-\gamma'\psi}]\,[\eta] , \tag{80}$$

$$[[1] - [\overline{T}]]\,[e^{-\gamma'\psi}]\,[\eta] = [V]\,[[e^{-\gamma\psi}]\,[\alpha] - [e^{\gamma\psi}]\,[\beta]] , \tag{81}$$

gdzie

$$[e^{\gamma'\psi}]\,[\gamma] = [\overline{T}]\,[e^{-\gamma'\psi}]\,[\eta] . \tag{82}$$

Eliminując z tych równań macierz $[\eta]$, otrzymujemy

$$[\beta] = -\,[e^{-\gamma\psi}]\,[[1] + [W]\,[U]\,[V]]^{-1}\,[[1] - [W]\,[\overline{U}]\,[V]]\,[e^{-\gamma\psi}]\,[\alpha] , \tag{83}$$

gdzie

$$[\bar{U}] = [[1] + [\bar{T}]] [[1] [\bar{T}]]^{-1}. \tag{84}$$

Macierz $[\bar{U}]$ jest normowaną macierzą impedancji obciążenia części II falowodu odniesioną względem płaszczyzny $z=\psi$. Podobnie, eliminacja macierzy $[\beta]$ prowadzi do

$$[\eta] = 2\,[e^{-\gamma'\psi}]\,[[1] - [T] + [V]\,[W]]\,[[1] + [T]]^{-1}\,[V]\,[e^{-\gamma\psi}]\,[\alpha]. \tag{85}$$

Analogiczna dyskusja przesunięcia płaszczyzny nieciągłości do $z=\psi$ w przypadku przedstawionym na rys. 2 prowadzi do zastąpienia równań (74) i (76) przez

$$[\gamma] = [e^{-\gamma'\psi}]\,[[1] + [V]\,[X]\,[W]]^{-1}\,[[1] - [V]\,[X]\,[W]]\,[e^{-\gamma'\psi}]\,[\eta], \tag{86}$$

$$[\alpha] = 2\,[e^{\gamma\psi}]\,[[1] + [\bar{L}] + [W]\,[V]]\,[[1] - [\bar{L}]]^{-1}\,[W]\,[e^{-\gamma'\psi}]\,[\eta], \tag{87}$$

gdzie

$$[e^{\gamma\psi}]\,[\gamma] = [\bar{L}]\,[e^{-\gamma\psi}]\,[\eta] \tag{88}$$

i

$$[\bar{X}] = [[1] - [\bar{L}]]\,[[1] + [\bar{L}]]^{-1}. \tag{89}$$

Macierz $[X]$ jest normowaną macierzą admitancji obciążenia części I falowodu odniesioną względem płaszczyzny $z=\psi$.

WYKAZ LITERATURY

1. Chołewicki T.: *Macierzowa analiza obwodów liniowych*, Warszawa 1958.
2. Marcuvitz N.: *Wavequide handbook*. Rad. Lab. Ser. Vol. 10 Nr 4, 1951.
3. Ryżyk I. M., Gradsztejn I. S.: *Tablicy intiegrałow*, Moskwa 1951.
4. Schelkunoff S. A.: *Electromagnetic waves* Nr 4. 1947.
5. Wajnsztejn L. A.: *Elektromagnitnyje wołny*, Moskwa 1957.

Dodatek 1

Poniżej podano w zwięzłym zarysie niektóre własności macierzy nieskończonych a w szczególności te, które są wykorzystane w analizie nieciągłości w falowodach. Istnieje szereg zasadniczych różnic między macierzami nieskończonymi a macierzami skończonymi. Jednak w zagadnieniach nas interesujących na specjalną uwagę zasługuje różnica w ujęciu macierzy odwrotnych.

Macierz nieskończoną określamy jako zbiór uporządkowany $[A] = [A_{m,n}]$ $(m, n=0,1,2\ldots.)$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Element znajdujący się na przecięciu m wiersza i n kolumny oznaczamy przez $A_{m,n}$. Dodawanie i mnożenie określamy jako

$$[A]+[B]=[A_{m,n}]+[B_{m,n}], \tag{D—1}$$

$$a\,[A]=[aA_{m,n}], \tag{D—2}$$

$$[A]\,[B]=[C], \tag{D—3}$$

gdzie

a jest dowolną liczbą rzeczywistą lub zespoloną,

natomiast

$$C_{m,n}=\sum_{k=0}^{\infty}A_{m,k}B_{k,n}. \qquad \text{(D—4)}$$

Macierz [0] nazywamy zerową, jeżeli wszystkie jej elementy są równe zeru.

Macierze nieskończone są często związane z układem nieskończonej ilości równań liniowych. Jako przykład takiego układu można podać

$$y_m=\sum_{n=0}^{\infty}A_{m,n}X_n \quad (m=0,1,2\ldots\ldots) \qquad \text{(D—5)}$$

co można zapisać w postaci macierzowej

$$[y]=[A]\,[X], \qquad \text{(D—6)}$$

gdzie $[X]$ i $[y]$ są nieskończonymi macierzami kolumnowymi.

Jeżeli

$$Z_m=\sum_{n=0}^{\infty}B_{m,n}y_n \quad (m=0,1,2\ldots\ldots) \qquad \text{(D—7)}$$

wówczas macierz kolumnowa $[Z]$ jest dana przez równanie

$$[Z]=[B]\,[A]\,[X]. \qquad \text{(D—8)}$$

Układ równań

$$y_m=D_mX_m \quad (m=0,1,2\ldots) \qquad \text{(D—9)}$$

można napisać w postaci macierzowej [1]

$$[y]=[D]\,[X], \qquad \text{(D—10)}$$

gdzie $D_{m,n}=D_m$ i $D_{m,n}=0$ $(m\neq n)$. Macierz $[D]$ nazywamy diagonalną. Jeżeli $D_m=1$ dla wszystkich m, to taka macierz diagonalna nazywa się jednostkową [2].

Macierz transponowaną $[A]'$ otrzymujemy z macierzy $[A]$ przez zamianę kolumn na wiersze i odwrotnie. A więc jeżeli $[A]=[A_{m,n}]$ to $[A]'=[A_{n,m}]$.

Jeżeli istnieją macierze $[A]$ i $[B]$ takie, że

$$[A]\,[B]=[1] \qquad \text{(D—11)}$$

to $[A]$ nazywamy lewostronną macierzą odwrotną macierzy $[B]$, zaś $[B]$ jest prawostronną macierzą odwrotną macierzy $[A]$. Z równania (D—11) nie wynika koniecznie równość $[B]\,[A]=[1]$. Oznaczając lewostronną macierz odwrotną przez $[A]^{-1}$ mamy zgodnie z równaniem (D—11)

$$[A]^{-1}\,[A]+[1] \qquad \text{(D—12)}$$

Macierzą odwrotną macierzy diagonalnej jest po prostu macierz diagonalna której elementy wzdłuż przekątnej są odwrotnościami odpowiednich elementów macierzy wyjściowej pod warunkiem, że żaden z tych ostatnich nie równa się zeru W przypadku ogólnym jednak znalezienie macierzy odwrotnej nie jest tak proste Okazuje się, że istnieją takie macierze, którym nie da się podporządkować macierzy odwrotnej. Często jednak macierz $[[1]+[A]]$ może mieć macierz odwrotną, aczkolwiek macierz $[A]$ takowej nie posiada.

Przy zastosowaniu nieskończonych macierzy do zagadnień falowodowych jest często wygodnie przedstawiać współczynniki modowe jako macierze kolumnowe

Wymaga to zastąpienia dwóch indeksów związanych ze współczynnikiem modu przez jeden indeks. Można to osiągnąć stosując np. regułę, którą ilustruje tablica D—I.

Tablica D—I

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	*Numer kolumny*
0	0	2	5	9	14	20	27	35	44	
1	1	4	8	13	19	26	34	43		
2	3	7	12	18	25	33	42			
3	6	11	17	24	32	41				
4	10	16	23	31	40					
5	15	22	30	39						
6	21	29	38							
7	28	37								
8	36									
Numer wiersza										

Za pomocą tej tablicy można w sposób prosty zastąpić podwójny indeks — pojedynczym. Każdej liczbie tablicy odpowiada bowiem para liczb, z których pierwsza odpowiada numerowi wiersza, druga zaś numerowi kolumny, na przecięciu których dana liczba występuje. Np. liczba 7 reprezentuje parę (2, 1), co pozwala napisać $TE_{2,1} = TE_7$, $a_7 = a_{2,1}$ itd. Należy jednak zwrócić uwagę, że ponieważ mody $TE_{0,0}$ i $TM_{0,0}$ nie istnieją, pojedynczy indeks 0 nie ma zastosowania i pierwszym elementem tak określonego nieskończonego ciągu jest indeks 1.

Rozpatrzmy teraz następujące równania macierzowe

$$[u]=[A]\,[x]+[B]\,[y]\,, \qquad \text{(D—13)}$$

$$[v]=[C]\,[x]+[D]\,[y]\,, \qquad \text{(D—14)}$$

gdzie $[u]$, $[v]$, $[x]$ i $[y]$ są macierzami kolumnowymi.

Stosując operację przeplatania, można sprowadzić te dwa równania macierzowe do jednego równania. Oznaczmy przez W macierz kolumnową, której elementy są określone następującymi wzorami

$$W_{2m-1}=u_m \quad (m=1.2,3\,\ldots\ldots) \qquad \text{(D—15)}$$

$$W_{2m}=v_m \qquad \text{(D—16)}$$

W analogiczny sposób tworzymy macierz kolumnową $[z]$ z macierzy $[x]$ i $[y]$.

Niech $[E]$ oznacza macierz o elementach

$$E_{2m-1,2n-1}=A_{m,n} \quad (m,n=1,2,3\,\ldots\ldots) \qquad \text{(D—17)}$$

$$E_{2m-1,2n}=B_{m.n} \qquad \text{(D—18)}$$

$$E_{2m,2n-1}=C_{m.n} \qquad \text{(D—19)}$$

$$E_{2m.2n}=D_{m.n} \qquad \text{(D—20)}$$

Wówczas

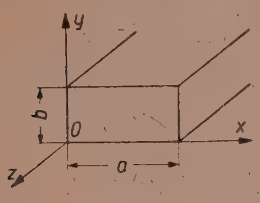
$$[W]=[E]\,[Z] \qquad \text{(D—21)}$$

gdzie $[E]$ można również napisać w postaci

$$[E]=\begin{bmatrix}[A]\,[B]\\ [C]\,[D]\end{bmatrix} \qquad \text{(D—22)}$$

Dodatek 2

Ogólne rozwiązanie równań Maxwella dla idealnego falowodu jest dobrze znane [5]. Zwięzłe omówienie tego zagadnienia ma na celu wyprowadzenia równania (1) przy zastosowaniu oznaczeń wprowadzonych w tej pracy.



Rys. 3.

Na rys. 3 pokazano przekrój prostokątnego falowodu i obrany układ współrzędnych prostokątnych. Wiadomo, że istnieje nieskończona ilość rozwiązań równań Maxwella, spełniających warunki brzegowe. Rozwiązania te nazywamy modami i dzielimy na dwie grupy TE i TM. Mody TE cechuje brak składowej podłużnej pola elektrycznego $E_z=0$, a dla modów TM mamy $H_z=0$. Poszczególne mody oznaczamy przez $TE_{m,n}$ lub $TM_{m,n}$, gdzie indeksy m i n przyjmują wartości 0, 1, 2, ...

Składowe pola modu $TE_{m,n}$ rozchodzącego się w dodatnim kierunku z mają następującą postać

$$E_x=a_{m,n}\left(\frac{j\omega\mu}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)e^{-\gamma_{m,n}z}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{D—23}$$

$$E_y=-a_{m,n}\left(\frac{j\omega\mu}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)e^{-\gamma_{m,n}z}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{D—24}$$

$$E_z=0, \tag{D—25}$$

$$H_x=a_{m,n}\left(\frac{\gamma_{m,n}}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)e^{-\gamma_{m,n}z}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{D—26}$$

$$H_y=a_{m,n}\left(\frac{\gamma_{m,n}}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{n\pi}{y}\right)e^{-\gamma_{m,n}z}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \tag{D—27}$$

$$H_z=a_{m,n}e^{-\gamma_{m,n}z}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{D—28}$$

gdzie $a_{m,n}$ jest dowolną stałą zespoloną, zwaną współczynnikiem modu.

$$k^2_{m,n}=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \tag{D—29}$$

$$\gamma_{m,n}=\sqrt{k^2_{m,n}-\omega^2\mu\varepsilon}, \tag{D—30}$$

Stała dielektryczna ε i przenikliwość magnetyczna μ dotyczą ośrodka wypełniającego falowodów. Zależność czasową $e^{j\omega t}$ wszystkich wielkości rozpatrywanych dla prostoty opuszczamy.

Wartość współczynnika modu $a_{m,n}$ wskazuje względną amplitudę modu $TE^{m,n}$ rozchodzącego się w dodatnim kierunku osi z. Wielkość $\Upsilon_{m,n}$ nazywa się stałą propagacji modu $TE_{m,n}$.

Składowe pola modu $TE_{m,n}$ rozchodzącego się w ujemnym kierunku osi z mają podobną postać, co równanie (D—23) — (D—28) z tą tylko różnicą, że zastępuje się $\gamma_{m,n}$ przez $-\gamma_{m,n}$. Współczynnik modu wskazujący względną amplitudę modu $TE_{m,n}$ rozchodzącego się w kierunku $z<0$ oznaczymy przez $b_{m,n}$.

Składowe pola modu $TM_{m,n}$ rozchodzącego się w kierunku $z > 0$ mają postać

$$E_x = -c_{m,n}\left(\frac{\gamma_{m,n}}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)e^{-\gamma_{m,n}z}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{D—31}$$

$$E_y = -c_{m,n}\left(\frac{\gamma_{m,n}}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)e^{-\gamma_{m,n}z}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{D—32}$$

$$E_z = c_{m,n}e^{-\gamma_{m,n}z}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{D—33}$$

$$H_x = c_{m,n}\left(\frac{j\omega\varepsilon}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)e^{-\gamma_{m,n}z}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{D—34}$$

$$H_y = -c_{m,n}\left(\frac{j\omega\varepsilon}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)e^{-\gamma_{m,n}z}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{D—35}$$

$$H_z = 0\,, \tag{D—36}$$

gdzie $c_{m,n}$ jest współczynnikiem modu $TM_{m,n}$ rozchodzącego się w kierunku $z > 0$.

Składowa pola modu $TM_{m,n}$ rozchodzącego się w kierunku z 0 otrzymamy z równań (D—31) — (D—36). Zastępując $\gamma_{m,n}$ przez $-\gamma_{m,n}$ oraz $c_{m,n}$ przez $-d_{m,n}$. Symbol $d_{m,n}$ oznacza oczywiście i w tym przypadku względną amplitudę modu $TM_{m,n}$ rozchodzącego się w kierunku $z < 0$.

Jeżeli $\omega^2\mu\varepsilon > k^2_{m,n}$, stała propagacji $\gamma_{m,n}$ jest urojona i odpowiadające temu mody $TE_{m,n}$ i $TM_{m,n}$ nazywamy propagacyjnymi. Natomiast gdy $\omega^2\mu\varepsilon < k^2_{m,n}$, $\gamma_{m,n}$ jest rzeczywista i odpowiadają temu mody zanikające.

Najbardziej ogólne wyrażenie możliwych rozkładów pól elektromagnetycznych w falowodzie mają oczywiście postać podwójnych nieskończonych szeregów zawierających wszystkie mody $TE_{m,n}$ i $TM_{m,n}$ rozchodzące się zarówno w kierunku $z > 0$ jak i $z < 0$. I tak np. składowa pola elektrycznego E_x wyrazi się wzorem

$$E_x = \sum_{m,n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{j\omega\mu}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)[a_{m,n}e^{-\gamma_{m,n}z} + b_{m,n}e^{\gamma_{m,n}z}] - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{\gamma_{m,n}}{k^2_{m,n}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)[c_{m,n}e^{-\gamma_{m,n}z} + d_{m,n}e^{\gamma_{m,n}z}]\right\}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{D—37}$$

co właśnie jest równaniem (1) podanym w pracy.

Wyrażenia podobne do równania (D—37) można oczywiście napisać dla wszystkich innych składowych pola.

Współczynniki modowe $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$ i $d_{m,n}$ muszą mieć właściwe wartości, aby spełnić specyficzne warunki brzegowe, które dochodzą do konwencjonalnych warunków $E_t = 0$, $H_n = 0$ na ściankach falowodu.

АНАЛИЗ СКАЧКООБРАЗНОЙ ПРЕРЫВИСТОСТИ ВОЛНОВОДОВ МЕТОДОМ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

В работе дано точное решение вопроса прерывистости волновода, заключающейся в скачкообразном измерении его поперечного сечения. Определение амплитуд всех возникающих модов обосновано на применении бесконечных матриц.

Изложенный метод, по всей вероятности, может быть применен также и для других случаев прерывистости.

ANALYSIS OF JUMP DISCONTINUITY OF WAVEGUIDES BY METHOD OF INFINITE MATRICES

The paper presents the exact solution of discontinuity problem in the waveguide consisting in a sudden change of cross-section.

Determining of the amplitudes of all arising modes of propagation is based upon the application of the infinite matrices.

It seems that this method may find its application in other types of discontinuity as well.

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI
TOM X ZESZYT 1 1961

621.3.01

H. WOŹNIACKI

Obliczanie i analiza sieci elektrycznych metodą wielomianów charakterystycznych

Rękopis dostarczono 22. 4. 1960

Autor opisuje w artykule metodę obliczania parametrów sieci elektrycznych w oparciu o tzw. wielomiany charakterystyczne oraz zaproponowaną przez autora tzw. algebrę sieciową. Metoda ta wynika z topologicznych właściwości sieci elektrycznych. W końcowej części artykułu opisane są zasady działania przyrządów służących do zmechanizowania względnie zautomatyzowania obliczeń sieci elektrycznych.

1. WIELOMIANY CHARAKTERYSTYCZNE [1] SIECI I ALGEBRA SIECIOWA

W artykule rozpatruje się sieci elektryczne [2] (zwane dalej w skrócie sieciami) liniowe, quasistacjonarne, energetycznie symetryczne, bez sprzężeń elektromagnetycznych i zasilane przez źródła prądowe wzgl. napięciowe — stałe lub sinusoidalnie zmienne o jednakowej częstotliwości [3]. Sieci te mogą być płaskie lub przestrzenne. Macierze impedancyjne wzgl. admitancyjne tych sieci są symetryczne.

Istnieje następująca zależność między ilością węzłów v, ilością oczek niezależnych n i ilością gałęzi b sieci:

$$v-1+n=b \tag{1}$$

Wprowadzimy następujące pojęcia:

d r z e w o [4] — jest to zbiór $(v-1)$ gałęzi sieci, łączących wszystkie węzły i nie tworzących ani jednego oczka;

d o p e ł n i e n i e [4] — jest to zbiór n gałęzi sieci, których równoczesne

[1] Wielomiany te można by również nazwać w i e l o m i a n a m i s t r u k t u r a l n y m i lub f u n k c j a m i s t r u k t u r a l n y m i sieci.

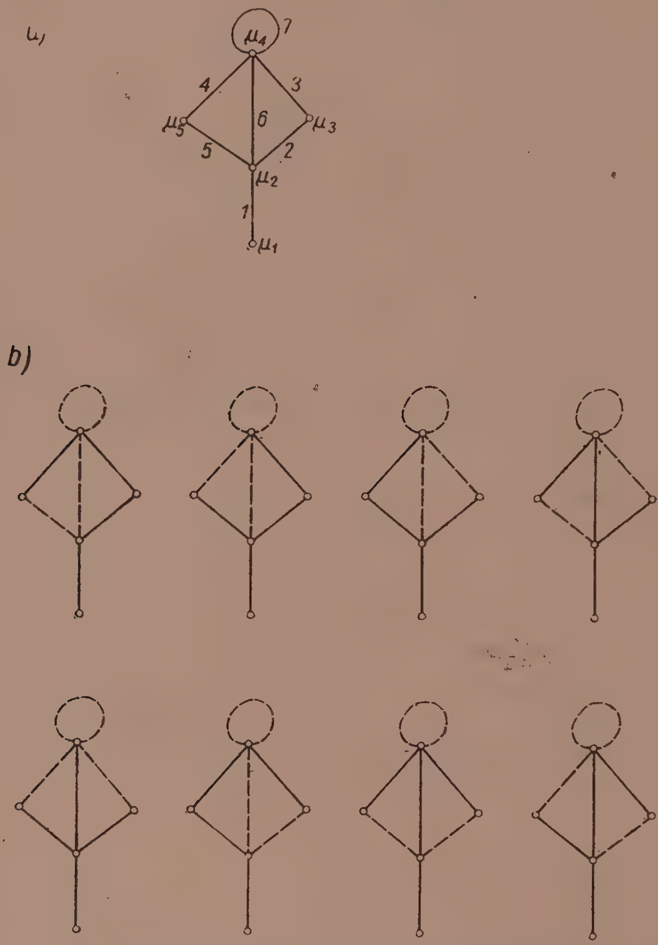
[2] Używane są także nazwy: o b w ó d e l e k t r y c z n y i u k ł a d e l e k t r y c z n y.

[3] Uwagi dotyczące stosowania metody wielomianów charakterystycznych do sieci elektrycznych o innych właściwościach podane są w końcowym rozdziale artykułu.

[4] W literaturze [1, 5, 6, 7, 9] podawane są podobne pojęcia. Pojęcie „drzewo" nazywane w jęz. ros. „dierewo", ang. „tree", niem. „vollständiger Baum (v. B.)" — definiowane jest jako zbiór (lub system) $(v-1)$ gałęzi łączących wszystkie węzły

przerwanie nie powoduje oddzielenia (odizolowania) ani jednego węzła od pozostałych węzłów sieci.

D r z e w o i d o p e ł n i e n i e tworzą w sumie c a ł ą s i e ć.



Rys. 1. a) sieć b) drzewa i dopełnienia
— — — gałęzie dopełnień ——— gałęzie drzew

Jest oczywiste, że ilość różnych drzew, jakie można utworzyć w danej sieci (równa ilości dopełnień), nie przekracza ilości kombinacji gałęzi $C_b^{v-1} = C_b^n$. Rysunek 1 przedstawia wszystkie możliwe drzewa (linie grube ciągłe) i dopełnienia (linie cienkie przerywane) sieci złożonej

sieci, zaś pojęcie „dopełnienie" nazywane w jęz. ros. „gławnyje wietwy", ang. „cotree", niem. „System unabhänger Zweige (S. u. Z.)" określone jest jako system gałęzi dopełniających „drzewo" lub zbiór tzw. gałęzi niezależnych (w związku z układem n niezależnych równań oczkowych).

z $b=7$ gałęzi, $v=5$ węzłów i $n=3$ oczka. Stwierdzamy, że ilość drzew (dopełnień) w tej sieci wynosi 8, ilość zaś kombinacji

$$C_7^4 = C_7^3 = 35$$

Zauważamy ponadto, że niezamknięta gałąź 1 należy do każdego drzewa czyli nie wchodzi w żadne dopełnienie, zwarta zaś gałąź 7 (tworząca oczko) nie należy do żadnego drzewa, czyli wchodzi do każdego dopełnienia.

Tworzenie drzew i dopełnień w sieci zawierającej źródła zasilania odbywa się przy założeniu, że wszystkie siły elektromotoryczne i prądy zasilania obniżone są do zera. Przyjmujemy przy tym, że idealne źródło napięciowe jest bezimpedancyjne ($z_{\text{wewn.}}=0$), idealne zaś źródło prądowe jest bezadmitancyjne ($y_{\text{wewn.}}=0$). Idealne zatem źródła zasilania nie tworzą odrębnych gałęzi, podczas gdy rzeczywiste źródła zasilania tworzą gałęzie.

Dalej wprowadzamy następujące pojęcia:

i l o c z y n i m p e d a n c y j n y jest to iloczyn impedancji n gałęzi dopełnienia;

i l o c z y n a d m i t a n c y j n y jest to iloczyn admitancji $(v-1)$ gałęzi drzewa.

Iloczyny te będziemy nazywać ogólnie i l o c z y n a m i lub s k ł a d n i k a m i a impedancje wzgl. admitancje gałęzi występujące w tych iloczynach — e l e m e n t a m i.

W i e l o m i a n i m p e d a n c y j n y s i e c i jest to suma wszystkich iloczynów impedancyjnych sieci.

W i e l o m i a n a d m i t a n c y j n y s i e c i jest to suma wszystkich iloczynów admitancyjnych sieci.

Ogólnie wielomiany te będziemy nazywać w i e l o m i a n a m i c h a r a k t e r y s t y c z n y m i oznaczając je odpowiednio symbolami $\overline{W}$, $\underline{W}$ i o g ó l n i e W. Dla sieci pokazanej na rys. 1 mamy:

$$\overline{W} = (z_5 \cdot z_6 + z_4 z_6 + z_3 z_6 + z_3 z_5 + z_3 z_4 + z_2 z_6 + z_2 z_5 + z_2 z_4) \cdot z_7 ,$$

$$\underline{W} = (y_2 y_3 y_4 + y_2 y_3 y_5 + y_2 y_4 y_5 + y_2 y_4 y_6 + y_2 y_5 y_6 + y_3 y_4 y_5 + y_3 y_4 y_6 + y_3 y_5 y_6) y_1 ,$$

gdzie z_k oznacza impedancję gałęzi k,

y_k oznacza admitancję gałęzi k.

W dalszym ciągu dla uproszczenia będziemy oznaczać:

z_k przez $\overline{k}$,

y_k przez $\underline{k}$.

W przypadkach gdy interpretacja symbolu k nie będzie budzić wątpliwości, dla uproszczenia będziemy stosować ten symbol do oznaczenia impedancji względnie admitancji gałęzi. Normalnie więc we wzorach

i obliczeniach, w których wystąpią wielomiany impedancyjne, symbol k oznaczać będzie impedancję gałęzi, natomiast w przypadku występowania wielomianów admitancyjnych symbol k oznaczać będzie admitancję gałęzi.

Z przytoczonych wyżej definicji wynika następujące stwierdzenie: *Ilość iloczynów impedancyjnych w wielomianie impedancyjnym jest równa ilości iloczynów admitancyjnych w wielomianie admitancyjnym danej sieci.*

Ponadto mamy następujący oczywisty związek:

$$\boxed{\frac{\overline{W}}{\underline{W}} = \prod_{1}^{b} \overline{k} \quad \text{lub} \quad \frac{\underline{W}}{\overline{W}} = \prod_{1}^{b} \underline{k}} \tag{2}$$

Wielomiany $\overline{W}$ i $\underline{W}$ jako funkcje parametrów jednej gałęzi k sieci można przedstawić w następującej postaci:

$$\left.\begin{aligned} \overline{W} &= \frac{\partial \overline{W}}{\partial k} \cdot k + S_k, \\ \underline{W} &= \frac{\partial \underline{W}}{\partial k} \cdot k + Q_k, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

gdzie S_k i Q_k są to wielomiany nie zawierające parametrów gałęzi k.

Z wyrażeń (3) wynikają następujące stwierdzenia:

Wielomian S_k jest wielomianem impedancyjnym sieci, w której węzły przynależne do gałęzi k zostały zwarte na skutek zaniku impedancji gałęzi k $(\overline{k}=0)$.

Takie zwarcie węzłów nazwiemy z w a r c i e m z a n i k o w y m.

Gdy zwarcie dwu węzłów nastąpiło na skutek ich bezpośredniego zetknięcia bez wyłączenia gałęzi k, wtedy wielomian impedancyjny tak zwartej sieci wyrazi się wzorem

$$\overline{W}_k = S_k \cdot k = (\overline{W}_{|k=0})\, k. \tag{4}$$

Ostatni rodzaj zwarcia nazywamy zwarciem gałęzi k lub krótko zwarciem, w odróżnieniu od zwarcia zanikowego, dla którego $\overline{W}_{k(\text{zanik})} = S_k = \overline{W}_{|k=0}$.

Z dualnej zależności (2) i z wyrażeń (3) wynika, że wielomian admitancyjny sieci, w której gałąź k została zwarta, wyrazi się następującym wzorem

$$\underline{W}_k = \frac{\partial \underline{W}}{\partial k}. \tag{5}$$

Wielomian Q_k jest wielomianem admitancyjnym sieci, w której

usunięta została gałąź k $(\underline{k}=0)$. Takie rozwarcie węzłów przynależnych do gałęzi k nazwiemy r o z w a r c i e m   z a n i k o w y m.

Gdy rozwarcie dwu węzłów nastąpiło na skutek odłączenia gałęzi k tylko od jednego z tych węzłów, wtedy wielomian admitancyjny tak rozwartej sieci wyrazi się wzorem

$$\underline{W}^{k}=Q_{k}\cdot k=(\underline{W}_{|k=0})\cdot k\,. \tag{6}$$

Ten rodzaj rozwarcia nazwiemy rozwarciem gałęzi k lub krótko rozwarciem, w odróżnieniu od rozwarcia zanikowego, dla którego $\underline{W}^{k}_{(\mathrm{zanik})}=Q_{k}=\underline{W}_{|k=0}$.

Z dualnej zależności (2) i z wyrażeń (3) wynika, że wielomian impedancyjny sieci, w której gałąź k została rozwarta, wyrazi się następującym wzorem

$$W^{k}=\frac{\partial W}{\partial k} \tag{7}$$

Dla przykładu obliczymy dla sieci pokazanej na rys. 1 : $\overline{W}_3$, $\overline{W}^3$, $\underline{W}^7$ i $\underline{W}_6$:

$$\overline{W}=(\overline{5}\cdot\overline{6}+\overline{4}\cdot\overline{6}+\overline{3}\cdot\overline{6}+\overline{3}\cdot\overline{5}+\overline{3}\cdot\overline{4}+\overline{2}\cdot\overline{6}+\overline{2}\cdot\overline{5}+\overline{2}\cdot\overline{4})\cdot\overline{7}$$

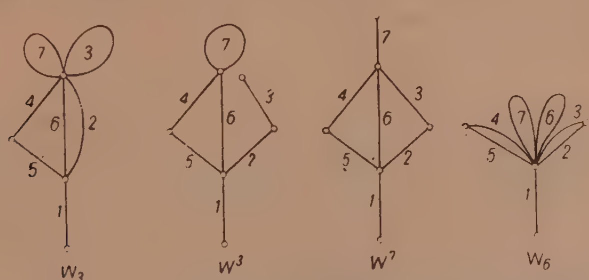
$$\overline{W}_3=(\overline{W}_{|\overline{3}=0})\cdot\overline{3}=(\overline{5}\cdot\overline{6}+\overline{4}\cdot\overline{6}+\overline{2}\cdot\overline{6}+\overline{2}\cdot\overline{5}+\overline{2}\cdot\overline{4})\cdot\overline{7}\cdot\overline{3}$$

$$\overline{W}^3=\frac{\partial\overline{W}}{\partial\overline{3}}=(\overline{6}+\overline{5}+\overline{4})\cdot\overline{7}$$

$$\underline{W}=(\underline{2}\cdot\underline{3}\cdot\underline{4}+\underline{2}\cdot\underline{3}\cdot\underline{5}+\underline{2}\cdot\underline{4}\cdot\underline{5}+\underline{2}\cdot\underline{4}\cdot\underline{6}+\underline{2}\cdot\underline{5}\cdot\underline{6}+\underline{3}\cdot\underline{4}\cdot\underline{5}+$$
$$+\underline{3}\cdot\underline{4}\cdot\underline{6}+\underline{3}\cdot\underline{5}\cdot\underline{6})\cdot\underline{1}$$

$$\underline{W}^7=(\underline{W}_{|\underline{7}=0})\cdot\underline{7}=\underline{W}\cdot\underline{7}$$

$$\underline{W}_6=\frac{\partial\underline{W}}{\partial\underline{6}}=(\underline{2}\cdot\underline{4}+\underline{2}\cdot\underline{5}+\underline{3}\cdot 4+\underline{3}\cdot\underline{5})\cdot\underline{1}$$



Rys. 2. Stany zwarć i rozwarć gałęzi sieci podane w postaci grafów

Czytelnik może sprawdzić prawidłowość tych wyników na schematach sieci zwartej i rozwartej (rys. 2).

Dla sieci, w której nastąpiło zwarcie zanikowe równocześnie w g gałęziach np. $k_1, k_2, \ldots, k_g$, mamy

$$\overline{W}_{k_1, k_2, \ldots, k_g (\text{zanik})} = \overline{W}_{|k_1=0,\, k_2=0,\, \ldots,\, k_g=0}. \tag{8}$$

$$\underline{W}_{k_1, k_2, \ldots, k_g (\text{zanik})} = \frac{\partial^g \underline{W}}{\partial k_1 \partial k_2 \ldots \partial k_g} \tag{9}$$

Dla sieci, w której zwarto g gałęzi np. $k_1, k_2, \ldots, k_g$, mamy

$$\overline{W}_{k_1, k_2, \ldots, k_g} = (\overline{W}_{|k_1=0,\, k_2=0,\, \ldots,\, k_g=0}) \cdot k_1 \cdot k_2 \ldots k_g \tag{10}$$

$$\underline{W}_{k_1, k_2, \ldots, k_g} = \frac{\partial^g \underline{W}}{\partial k_1 \partial k_2 \ldots \partial k_g}. \tag{11}$$

Z wzorów (9) i (11) wynika równość

$$\underline{W}_{k_1, k_2, \ldots, k_g (\text{zanik})} = \underline{W}_{k_1, k_2, \ldots, k_g}. \tag{12}$$

Dla sieci, w której nastąpiło rozwarcie zanikowe równocześnie w g gałęziach np. $k_1, k_2, \ldots, k_g$, mamy

$$W^{k_1, k_2, \ldots, k_g}_{(\text{zanik})} = \frac{\partial^g \overline{W}}{\partial k_1 \partial k_2 \ldots \partial k_g}, \tag{13}$$

$$\underline{W}^{k_1, k_2, \ldots, k_g}_{(\text{zanik})} = \underline{W}_{|k_1=0,\, k_2=0,\, \ldots,\, k_g=0}. \tag{14}$$

Dla sieci, w której rozwarto g gałęzi np. $k_1, k_2, \ldots, k_g$ mamy

$$\overline{W}^{k_1, k_2, \ldots, k_g} = \frac{\partial^g \overline{W}}{\partial k_1 \partial k_2 \ldots \partial k_g} \tag{15}$$

$$\underline{W}^{k_1, k_2, \ldots, k_g} = (\underline{W}_{|k_1=0,\, k_2=0,\, \ldots,\, k_g=0}) \cdot k_1, k_2, \ldots, k_g. \tag{16}$$

Z wzorów (13) i (15) wynika równość

$$W^{k_1, k_2, \ldots, k_g}_{(\text{zanik})} = \overline{W}^{k_1, k_2, \ldots, k_g}. \tag{17}$$

Interpretując powyższe wzory stwierdzamy, że *gdy parametry g gałęzi sieci stają się nieskończenie duże, wtedy wielomiany charakterystyczne sieci stają się pochodnymi względem parametrów tych g gałęzi. A zatem wielomian charakterystyczny sieci o skończonej liczbie gałęzi posiada w każdym przypadku wartość skończoną.*

Wprowadzimy obecnie pojęcia dwóch działań algebry sieciowej: sumy i iloczynu sieciowego.

Działania te wykonywać będziemy na wielomianach charakterystycznych, ich składnikach i elementach, a więc na formach liniowych zbioru

liczb zespolonych. Dla zdefiniowania tych działań konieczne jest określenie równości i identyczności powyższych form liniowych zbioru liczb zespolonych.

Definicja równości jest tutaj identyczna z definicją równości liczb zespolonych, a więc dwie formy liniowe F_1 i F_2 są sobie równe

$$F_1 = F_2,$$

gdy ich wartości liczbowe otrzymane w wyniku wykonania działań są sobie równe.

Identyczność form zdefiniujemy następująco:
Dwa elementy k_1 i k_2 są identyczne

$$k_1 \equiv k_2,$$

gdy są sobie równe ($k_1 = k_2$) oraz gdy reprezentują ten sam parametr (impedancję wzgl. admitancję) jednej i tej samej gałęzi sieci.

Dwa składniki s_1 i s_2 są identyczne

$$s_1 \equiv s_2,$$

gdy składają się z identycznych elementów.

Dwa wielomiany charakterystyczne ${}_1W$ i ${}_2W$ są identyczne

$${}_1W \equiv {}_2W,$$

gdy składają się z identycznych składników.

Jest oczywiste, że z identyczności form wynika ich równość, natomiast z równości form nie wynika ich identyczność.

W dalszym ciągu będziemy używać pojęcia równości form wynikającej z ich identyczności.

Zdefiniujemy obecnie pojęcie sumy sieciowej.
Suma sieciowa dwóch nieidentycznych (różnych) składników[5] *jest równa ich sumie, suma zaś sieciowa dwóch identycznych składników jest równa zero,* czyli:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{jeśli} \quad s_1 \not\equiv s_2, & \text{to} & s_1 \oplus s_2 = s_1 + s_2 \\ \text{i} & & s_i \oplus s_i = 0\,,^{6} \end{array}\right\} \tag{18}$$

gdzie symbol $\oplus$ oznacza sumowanie sieciowe.
Odpowiednikiem sumy sieciowej w algebrze Boole'a jest suma modulo dwa reprezentowana przez następującą tablicę:

$\oplus$	1	0
1	0	1
0	1	0

[5] Składnik może być wielo- lub jednoelementowy.
[6] Suma sieciowa nie podlega zatem prawu idempotentności $X+X=X$.

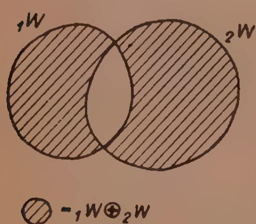
Suma sieciowa podlega prawu parzystości (parity checks), tj.:

$$\sum_{\substack{s\\ i=1}}^{i=2n} s_i = 0, \qquad \sum_{\substack{s\\ i=1}}^{i=2n+1} s_i = s_i, \tag{18'}$$

gdzie symbol $_s\sum$ oznacza sumowanie sieciowe, a $n=1, 2, 3, \ldots$

Z definicji sumy sieciowej składników wynika sposób sumowania sieciowego form liniowych typu wielomianów charakterystycznych $W=\sum s_i$, a mianowicie: *suma sieciowa dwóch wielomianów charakterystycznych* $_1W=\sum s_{1i}$ i $_2W=\sum s_{2i}$ *jest sumą wszystkich nieidentycznych składników obu wielomianów.*

Rys. 3 przedstawia obrazowo sumę sieciową dwóch wielomianów charakterystycznych $_1W$ i $_2W$



Rys. 3.

Sumę sieciową dwóch wielomianów charakterystycznych można wyrazić następującymi wzorami:

$$\left.\begin{aligned} {}_1W \oplus {}_2W &= [{}_1W \vee {}_2W] - [{}_1W \wedge {}_2W] \\ \text{i} \qquad {}_1W \oplus {}_2W &= {}_1W + {}_2W - 2\,[{}_1W \wedge {}_2W], \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

gdzie symbol $\vee$ oznacza sumę logiczną, zaś symbol $\wedge$ iloczyn logiczny.

Do sumowania sieciowego wielomianów charakterystycznych mają zastosowanie prawa (18) i (18′), czyli:

$$\left.\begin{aligned} &\text{jeśli} \quad {}_1W \neq {}_2W, \quad \text{to} \quad {}_1W \oplus {}_2W = {}_1W + {}_2W \\ &\qquad\qquad {}_lW \oplus {}_lW = 0 \\ &\sum_{\substack{s\\ l=1}}^{l=2n} {}_lW = 0, \qquad \sum_{\substack{s\\ l=1}}^{l=2n+1} {}_lW = {}_lW. \end{aligned}\right\} \tag{18''}$$

Do sumy sieciowej stosuje się prawo przemienności

$$_1W \oplus {}_2W = {}_2W \oplus {}_1W. \tag{20}$$

Sumowanie sieciowe podlega prawu łączności

$$_1W \oplus ({}_2W \oplus {}_3W) = ({}_1W \oplus {}_2W) \oplus$$
$$\oplus\, {}_3W = {}_1W \oplus {}_2W \oplus {}_3W. \tag{21}$$

	a	b	c	d	e	f	g
$_1W$	1	1		1	1		
$_2W$	1	1	1			1	
$_3W$	1		1	1			1
$_2W \oplus {}_3W$		1		1		1	1
$_1W \oplus ({}_2W \oplus {}_3W)$	1				1	1	1
$_1W \oplus {}_2W$			1	1	1	1	
$({}_1W \oplus {}_2W) \oplus {}_3W$	1				1	1	1

Dowód tego stanowi powyższa tablica, w której litery $a, b, \ldots, g$ oznaczają wszystkie możliwe składniki wielomianów $_1W$, $_2W$ i $_3W$:

Z zależności

$$ {}_1W \oplus {}_2W = {}_3W \tag{22}$$

wynikają następujące związki:

$$\left.\begin{aligned} {}_1W \oplus {}_3W &= {}_2W, \\ {}_2W \oplus {}_3W &= {}_1W, \\ {}_1W \oplus {}_2W \oplus {}_3W &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{22'}$$

W dalszym ciągu wielomiany charakterystyczne będziemy rozumieli jako sumy sieciowe składników:

$$W = {}_s\sum s_i \text{ [7]} \tag{23}$$

Zdefiniujemy obecnie pojęcie iloczynu sieciowego. *Iloczyn sieciowy dwóch różnych elementów jest równy iloczynowi tych elementów, iloczyn zaś sieciowy dwóch identycznych elementów jest równy zero*, czyli:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{jeśli} & k_1 \neq k_2, & \text{to} & k_1 \circ k_2 = k_1 \cdot k_2 \\ \text{i} & & & k_i \circ k_i = 0 \text{ [8]} \end{array}\right\} \tag{24}$$

gdzie symbol $\circ$ oznacza mnożenie sieciowe.

Z powyższych definicji iloczynu sieciowego dwóch elementów wynika prawo mnożenia sieciowego wielu elementów. *Iloczyn sieciowy różnych elementów jest równy ich iloczynowi, natomiast iloczyn sieciowy elementów, wśród których przynajmniej dwa są identyczne, jest równy zero.* (24')

Temu prawu podlega również mnożenie sieciowe składników. *Iloczyn sieciowy składników nie posiadających identycznych elementów jest równy iloczynowi tych składników, natomiast iloczyn sieciowy składników, wśród których przynajmniej dwa posiadają co najmniej jeden identyczny element, jest równy zero.*

Mnożenie sieciowe wielomianów charakterystycznych podlega tym samym regułom co mnożenie form liniowych o postaci $F = \sum a_i$ z zastosowaniem podanych wyżej zasad mnożenia i sumowania sieciowego składników i elementów.

Oczywiste jest, że zasady (24) i (24') stosują się również do składników i wielomianów charakterystycznych. A zatem kwadrat sieciowy lub wyższa potęga sieciowa wielomianu charakterystycznego jest równa zero

$$W^{\circ n>1} = 0. \tag{25}$$

[7] Dla uproszczenia zapisu w wielomianach charakterystycznych będziemy używać symbolu dodawania + zamiast symbolu $\oplus$.

[8] Iloczyn sieciowy nie podlega zatem prawu idempotentności $X \cdot X = X$ oraz jego działanie odwrotne nie jest jednoznaczne.

Iloczyn sieciowy wielomianów charakterystycznych nie zawierających parametrów tych samych gałęzi jest równy iloczynowi tych wielomianów

$$W(k_1, k_2, \ldots, k_g) \circ W(l_1, l_2, \ldots, l_h) = W(k_1, k_1, \ldots, k_g) \cdot W(l_1, l_2, \ldots, l_h). \tag{26}$$

gdzie $k \neq l$.

Obowiązuje prawo rozdzielności mnożenia sieciowego względem dodawania sieciowego

$${}_1W \circ ({}_2W \oplus {}_3W) = ({}_1W \circ {}_2W) \oplus ({}_1W \circ {}_3W). \tag{27}$$

Obowiązuje także prawo rozdzielności dodawania sieciowego względem mnożenia sieciowego.

$$({}_1W \circ {}_2W) \oplus ({}_1W \circ {}_3W) = {}_1W \circ ({}_2W \oplus {}_3W). \tag{28}$$

Dowód wzorów (27) i (28) jest następujący.
Niech będzie w najogólniejszym przypadku

$${}_1W = a+b+c+f,$$
$${}_2W + a+b+d+g,$$
$${}_3W = a+c+d+h.$$

Zatem

$$\begin{aligned}{}_1W \circ ({}_2W \oplus {}_3W) &= a \circ b \oplus b \circ f \oplus b \circ g \oplus b \circ h \oplus a \circ c \oplus a \circ f \oplus \\ &\oplus c \circ g \oplus c \circ h \oplus a \circ g \oplus a \circ h \oplus f \circ g \oplus f \circ h = \\ &= ({}_1W \circ {}_2W) \oplus ({}_1W \circ {}_3W).\end{aligned}$$

Ilorazu iloczynów sieciowych nie można upraszczać przez wspólne wielomiany charakterystyczne np.

$$\frac{{}_1W \circ {}_2W}{{}_1W \circ {}_3W} \neq \frac{{}_2W}{{}_3W}. \tag{29}$$

Funktory dodawania i mnożenia sieciowego zapewniają zachowanie w wynikach działań algebry sieciowej wszystkich cech wielomianów charakterystycznych a mianowicie:
1) współczynniki składników: +1 lub 0,
2) wykładniki potęgowe parametrów gałęzi: +1 lub 0,
3) ilość elementów w składnikach wielomianu — jednakowa.

Elementarnymi wielomianami charakterystycznymi są: suma węzłowa ${}_s\sum\limits_{\mu}$ i suma oczkowa ${}_s\sum\limits_{m}$.

Suma węzłowa $\sum\limits_{\mu}$ *węzła* μ *jest to suma sieciowa wszystkich admitancji gałęzi węzła* μ[9].

[9] Każda końcówka gałęzi węzła μ reprezentowana jest w sumie węzłowej jako admitancja tej gałęzi.

Suma węzłowa ${}_s\sum_{\mu}$ jest wielomianem admitancyjnym sieci, której wszystkie węzły oprócz węzła μ są ze sobą zwarte.

Jak wynika z definicji sumy sieciowej, suma węzłowa ${}_s\sum_{\mu}$ nie zawiera admitancji gałęzi zwartych przez węzeł μ.

Suma oczkowa ${}_s\sum_{m}$ *oczka* m *jest to suma sieciowa impedancji gałęzi tworzących oczko* m.

Suma oczkowa ${}_s\sum_{m}$ jest wielomianem admitancyjnym sieci, której wszystkie oczka oprócz oczka m są rozwarte.

Z definicji wielomianów charakterystycznych wynikają następujące prawa:

$$\boxed{\overline{W} = {}_s\prod_{1}^{n} {}_s\sum_{m}} \tag{30}$$

$$\boxed{\underline{W} = {}_s\prod_{1}^{v-1} {}_s\sum_{n}} \tag{31}$$

gdzie symbol ${}_s\prod$ oznacza iloczyn sieciowy.

Wielomian impedancyjny jest iloczynem sieciowym n sum oczkowych sieci.

Wielomian admitacyjny jest iloczynem sieciowym (v — 1) sum węzłowych sieci.

Dowód wzoru (30):

Łatwo można stwierdzić, że wzór (30) sprawdza się dla sieci jedno i dwuoczkowej. Załóżmy, że wzór ten obowiązuje również dla sieci n i $(n-1)$ oczkowej. W sieci n-oczkowej połączmy dwa węzły gałęzią k (która może się składać z wielu gałęzi połączonych szeregowo). Dla sieci o n oczkach możemy napisać

$$\overset{n}{\overline{W}} = \left({}_s\prod^{n-1} {}_s\sum_{m}\right) \circ {}_s\sum_{n}.$$

W tym wyrażeniu przez n oznaczyliśmy oczko zawierające węzły, które połączymy gałęzią k i które dzielą sumę oczkową ${}_s\sum_{n}$ na dwie części a i b

$${}_s\sum_{n} = a + b\,.$$

Iloczyn sieciowy

$$\left(\overset{n+1}{\overline{W}}\right) = \left({}_s\prod^{n-1} {}_s\sum_{m}\right) \circ (a+k) \circ (b+k) = \overset{n}{\overline{W}} \cdot k + \overset{n-1}{\overline{W}} \circ (ab)\,.$$

Ponieważ

$$\overset{n}{\overline{W}} = \frac{\partial \overset{n+1}{\overline{W}}}{\partial k} \quad \text{(sieć } (n+1) \text{ oczkowa rozwarta)}$$

i

$$\overset{n-1}{\overline{W}} \circ (ab) = \overset{n+1}{\overline{W}}\Big|_{k=0} \quad \text{(sieć } (n+1) \text{ oczkowa zwarta)}$$

przeto w myśl wzoru (3):

$$\left(\overset{n+1}{\overline{W}}\right) = \overset{n+1}{\overline{W}} = {}_{s}\prod^{n+1} {}_{s}\sum_{m}$$

Analogicznie można udowodnić wzór (31).

Rozbudowę sieci do dowolnej postaci można przeprowadzić tworząc nowe oczka i węzły. A zatem wzory (30) i (31) obowiązują dla każdej sieci.

P r z y k ł a d y. Dla sieci podanej na rys. 1 mamy:

$$\overline{W} = \overline{7} \circ (\overline{4}+\overline{5}+\overline{6}) \circ (\overline{2}+\overline{3}+\overline{6}) = \overline{7}(\overline{2}\cdot\overline{4}+\overline{2}\cdot\overline{5}+\overline{2}\cdot\overline{6}+\overline{3}\cdot\overline{4}+\overline{3}\cdot\overline{5}+$$
$$+\overline{3}\cdot\overline{6}+\overline{4}\cdot\overline{6}+\overline{5}\cdot\overline{6}),$$

$$\underline{W} = \underline{1} \circ (\underline{4}+\underline{5}) \circ (\underline{2}+\underline{3}) \circ (\underline{3}+\underline{4}+\underline{6}) = \underline{1} \circ (\underline{2}\cdot\underline{4}+\underline{2}\cdot\underline{5}+\underline{3}\cdot\underline{4}+$$
$$+\underline{3}\cdot\underline{5}) \circ (\underline{3}+\underline{4}+\underline{6}) = \underline{1}(\underline{2}\cdot\underline{3}\cdot\underline{4}+\underline{2}\cdot\underline{3}\cdot\underline{5}+\underline{2}\cdot\underline{4}\cdot\underline{5}+\underline{3}\cdot\underline{4}\cdot\underline{5}+$$
$$+\underline{2}\cdot\underline{4}\cdot\underline{6}+\underline{2}\cdot\underline{5}\cdot\underline{6}+\underline{3}\cdot\underline{4}\cdot\underline{6}+\underline{3}\cdot\underline{5}\cdot\underline{6})$$

W powyższym przykładowym obliczeniu suma węzłowa ${}_{s}\sum_{\mu_4} = \underline{3}+\underline{4}+\underline{6}$ nie zawiera admitancji $\underline{7}$, gdyż występuje ona w tym węźle 2 razy, a zatem, zgodnie z zasadą sumowania sieciowego, nie uwzględnia się jej w sumie węzłowej.

Jako oczka można obierać dowolne zamknięte pętle gałęzi sieci. Najwygodniej jest obierać oczka i węzły o najmniejszej ilości gałęzi.

Sumy węzłowe w ogólniejszym pojęciu są to sumy sieciowe admitancji gałęzi łączących części sieci, powstałe z podziału sieci dowolną powierzchnią zamkniętą (nie przechodzącą przez węzły). *W tym zrozumieniu węzeł jest częścią sieci zawartą w zamkniętym obszarze.* Wynika to z następującej zależności

$${}_{s}\sum_{\mu_1} \circ {}_{s}\sum_{\mu_2} = \left({}_{s}\sum_{\mu_1} \oplus {}_{s}\sum_{\mu_2}\right) \circ {}_{s}\sum_{\mu_1} = \left({}_{s}\sum_{\mu_1} \oplus {}_{s}\sum_{\mu_2}\right) \circ {}_{s}\sum_{\mu_2}$$

Można udowodnić, że dla sieci n oczkowej i v węzłowej

$$ {}_s\prod_{m=1}^{m=p>n} {}_s\sum_{m} = 0 \tag{32} $$ [10]

i

$$ {}_s\prod_{\mu=1}^{\mu=v>(v-1)} {}_s\sum_{\mu} = 0 \tag{33} $$ [10]

P r z y k ł a d: Dla sieci podanej na rys. 1.

$$ \overline{W} \circ (\overline{2} + \overline{3} + \overline{4} + 5) = 0 $$

$$ \underline{W} \circ (\underline{1} + \underline{2} + \underline{5} + \underline{6}) = 0 $$

Stosując algebrę sieciową, podane poprzednio wzory na zwarcie i rozwarcie gałęzi sieci można przedstawić w następującej postaci:

$$ \boxed{\overline{W}_k = \overline{W} \circ k} \tag{4'} $$

$$ \boxed{\underline{W}^k = \underline{W} \circ k} \tag{6'} $$

$$ \overline{W}_{k_1, k_2, \ldots, k_g} = \overline{W} \circ (k_1 . k_2 \ldots k_g) \tag{10'} $$

$$ \underline{W}^{k_1, k_2, \ldots, k_g} = \underline{W} \circ (k_1 . k_2 \ldots k_g) . \tag{16'} $$

Z wzorów (32), (33), (4′) i (6′) wynikają następujące wnioski.

Suma sieciowa wielomianów charakterystycznych wszystkich sieci powstałych przez kolejne zwieranie par węzłów znajdujących się na dowolnej, zamkniętej drodze m sieci jest równa zero (prawo oczkowe)

$$ \boxed{\overline{W} \circ {}_s\sum_{m} = 0} \tag{34} $$

a zatem także

$$ \boxed{{}_s\sum_{m} \left(\frac{\partial W}{\partial k} \right) = 0} , \tag{35} $$

Suma sieciowa wielomianów charakterystycznych wszystkich sieci powstałych przez kolejne rozwieranie gałęzi jednego węzła μ jest równa zero (prawo węzłowe)

$$ \boxed{\underline{W} \circ {}_s\sum_{\mu} = 0} \tag{36} $$

[10] Wzory te wynikają z wzoru (58) w rozdziale drugim.

a zatem także

$$\boxed{\sum_{s\,\mu}\left(\frac{\partial\overline{W}}{\partial k}\right)=0} \tag{37}$$

Z wzorów (34) i (35) wynika bezpośrednio ogólne prawo zwarcia dwu węzłów sieci.

Wielomian charakterystyczny sieci o zwartych z sobą dwóch węzłach μ_1 i μ_2 jest sumą sieciową wielomianów charakterystycznych wszystkich sieci powstałych przez kolejne zwieranie par węzłów znajdujących się na dowolnie obranej drodze między węzłami μ_1 i μ_2.

Oznaczmy węzły na drodze między węzłami μ_1 i μ_2 przez $v_1, v_2, \ldots, v_g$. Powyższe twierdzenie wyrazimy zatem następującym wzorem

$$\boxed{W_{\mu_1\mu_2}=W_{\mu_1 v_1}\oplus W_{v_1 v_2}\oplus\ldots\oplus W_{v_g\mu_2}} \tag{38}$$

Jeśli między poszczególnymi węzłami μ_1 i v_1, v_1 i $v_2, \ldots, v_g$ i μ_2 istnieją gałęzie $k_0, k_1, \ldots, k_g$, to wzór (38) można przedstawić w następujących postaciach:

$$W_{\mu_1\mu_2}=\frac{\partial\underline{W}}{\partial k_0}\oplus\frac{\partial\underline{W}}{\partial k_1}\oplus\ldots\oplus\frac{\partial\underline{W}}{\partial k_g} \tag{39}$$

i

$$\overline{W}_{\mu_1\mu_2}=\overline{W}\circ(k_0\oplus k_1\oplus\ldots\oplus k_g). \tag{40}$$

Wzór (40) można wyrazić słownie w następujący sposób:

Wielomian impedancyjny sieci o zwartych ze sobą dwu węzłach μ_1 i μ_2 jest iloczynem sieciowym wielomianu impedancyjnego sieci nie zwartej i sumy oczkowej dowolnego oczka powstałego na skutek zwarcia węzłów μ_1 i μ_2.

P r z y k ł a d: W sieci podanej na rys. 1 zwieramy ze sobą węzły μ_3 i μ_5. Obieramy drogę przejścia od węzła μ_3 do μ_5 poprzez węzeł μ_4 i otrzymujemy

$$\underline{W}_{\mu_3\mu_5}=\frac{\partial\underline{W}}{\partial\underline{3}}\oplus\frac{\partial\underline{W}}{\partial\underline{4}}=$$

$$=\underline{1}\circ(\underline{4}+\underline{5})\circ(\underline{2}+\underline{4}+\underline{6})\oplus\underline{1}\circ(\underline{2}+\underline{3})\circ(\underline{3}+\underline{5}+\underline{6})=$$

$$=\underline{1}\circ(\underline{2}\cdot\underline{4}+\underline{4}\cdot\underline{5}+\underline{4}\cdot\underline{6}+\underline{5}\cdot\underline{6}+\underline{2}\cdot\underline{3}+\underline{2}\cdot\underline{6}+\underline{3}\cdot\underline{5}+\underline{3}\cdot\underline{6}),$$

$$\overline{W}_{\mu_3\mu_5}=\overline{W}\circ(\overline{3}+\overline{4})=\overline{7}\circ(\overline{4}+\overline{5}+\overline{6})\circ(\overline{2}+\overline{3}+\overline{6})\circ(\overline{3}+\overline{4}).$$

W wzorów (36) i (37) wynika bezpośrednio ogólne prawo podziału węzła.

Wielomian charakterystyczny sieci o podzielonym na dwie części węźle μ jest sumą sieciową wielomianów charakterystycznych wszystkich sieci powstałych przez kolejne odłączanie gałęzi od węzła μ i przyłączanie ich do tworzonego nowego węzła (będącego odłączoną częścią węzła μ).

Oznaczmy gałęzie jednej z dwu części węzła μ przez $k_1, k_2, \ldots, k_g$. Powyższe twierdzenie o podziale węzła wyrazimy następującym wzorem

$$\boxed{W^{\mu(1\ldots g)} = W^{k_1} \oplus W^{k_2} \oplus \ldots \oplus W^{k_g}}. \tag{41}$$

Wzór ten można wyrazić w dwóch postaciach

$$\overline{W}^{\mu(1\ldots g)} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial k_1} \oplus \frac{\partial \overline{W}}{\partial k_2} \oplus \ldots \oplus \frac{\partial \overline{W}}{\partial k_g} \tag{42}$$

i

$$\underline{W}^{\mu(1\ldots g)} = \underline{W} \circ (k_1 \oplus k_2 \oplus \ldots \oplus k_g). \tag{43}$$

Wzór (43) można wyrazić słownie w sposób następujący:
Wielomian admitancyjny sieci, w której węzeł μ został podzielony na dwa węzły, jest równy iloczynowi sieciowemu wielomianu admitancyjnego sieci z niepodzielonym węzłem μ i sumy węzłowej dowolnego węzła powstałego na skutek podziału węzła μ.

P r z y k ł a d: W sieci podanej na rys. 1 dzielimy węzeł μ_4 na dwie części w ten sposób, że powstaje nowy węzeł łączący gałęzie 3 i 7 (rys. 4)

$$\overline{W}^{\mu_4(3,7)} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{3}} \oplus \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{7}} = \overline{7} \circ (\overline{4} + \overline{5} + \overline{6}) \oplus (4 + \overline{5} + \overline{6}) \circ (\overline{2} + \overline{3} + \overline{6}),$$

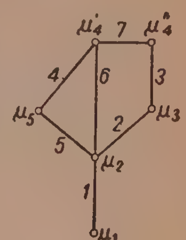
$$\underline{W}^{\mu_4(3,7)} = \underline{W} \circ (\underline{3} + \underline{7}) = \underline{1} \circ (\underline{1} + \underline{2} + \underline{5} + \underline{6}) \circ (\underline{4} + \underline{5}) \circ (\underline{2} + \underline{3}) \circ (\underline{3} + \underline{7}) =$$

$$= \underline{1} \cdot [(\underline{2} + \underline{5} + \underline{6}) \circ (\underline{4} + \underline{5}) \circ (\underline{2} \cdot \underline{3}) \oplus (\underline{2} + \underline{5} + \underline{6}) \circ (\underline{4} +$$

$$+ \underline{5}) \circ (\underline{2} + \underline{3}) \underline{7}].$$

Przytoczone wzory na zwarcie dwu węzłów i podział węzła na dwie części pozwalają obliczać wielomiany charakterystyczne dla zwarcia wielu węzłów lub dla podziału węzła(ów) na więcej części. Tak np. przy zwarciu dwu par węzłów lub trzech węzłów otrzymujemy

$$\overline{W}_{zw} = \overline{W} \circ {}_s\sum_{m_1} \circ {}_s\sum_{m_2}$$



Rys. 4.

gdzie m_1 i m_2 są to oczka powstałe na skutek dokonania zwarć węzłów.

Wielomiany charakterystyczne są równe głównym wyznacznikom ma-

cierzy admitancyjnych, względnie impedancyjnych sieci, które z kolei są równe iloczynom sieciowym elementów ich głównych przekątni[11].

Wykorzystując właściwości tych wyznaczników wyciągamy następujące ogólne wnioski.

Zwarciu węzłów sieci odpowiada zastąpienie w wielomianie admitancyjnym iloczynu sieciowego sum węzłowych tych węzłów sumą sieciową tych sum węzłowych. Np.:

$$\underline{W}_{(\mu_1\mu_2\mu_3)(\mu_5\mu_6)} = \overline{{}_s\sum_{\mu_1} \circ {}_s\sum_{\mu_2} \circ {}_s\sum_{\mu_3}} \circ {}_s\sum_{\mu_4} \circ \overline{{}_s\sum_{\mu_5} \circ {}_s\sum_{\mu_6}} \circ \ldots =$$

$$= \Big({}_s\sum_{\mu_1} \oplus {}_s\sum_{\mu_2} \oplus {}_s\sum_{\mu_3}\Big) \circ {}_s\sum_{\mu_4} \circ \Big({}_s\sum_{\mu_5} \oplus {}_s\sum_{\mu_6}\Big) \circ \ldots,$$

gdzie klamry górne oznaczają zwarcia odpowiednich węzłów.

W przypadku zwarcia dwóch węzłów μ_1 i μ_2 otrzymamy

$$\underline{W}_{\mu_1\mu_3} = \Big({}_s\sum_{\mu_1} \oplus {}_s\sum_{\mu_2}\Big) \circ {}_s\prod_{3}^{\nu-1} {}_s\sum_{\mu} \tag{44}$$

Wielomiany charakterystyczne sieci posiadają cały szereg dalszych właściwości. Omawianie ich wykracza poza ramy niniejszego artykułu. Dla przykładu podamy niektóre z nich:

— Wielomiany charakterystyczne sieci podzielonej na odrębne części są równe zero

$$W_{\text{sieci podz.}} = 0\,. \tag{45}$$

Wynika to bezpośrednio z definicji d r z e w a i d o p e ł n i e n i a.

— Wielomiany charakterystyczne sieci złożonej z dwóch lub kilku podsieci posiadających tylko jeden wspólny węzeł są równe iloczynom wielomianów charakterystycznych tych podsieci

$$W = {}_1W \cdot {}_2W \cdot {}_3W \ldots \tag{46}$$

Wynika to ze wzoru (26).

— Wielomiany charakterystyczne sieci, do której wprowadzona została gałąź k łącząca węły μ_1 i μ_2 wyrażają się następującymi wzorami:

$$\left.\begin{aligned} \underline{W}' &= \underline{W} + k\underline{W}_{\mu_1\mu_2} \\ \overline{W}' &= \overline{W}k + \overline{W}_{\mu_1\mu_2} \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Wzory te wynikają z rozważenia dwóch stanów sieci przy $k = 0$ i $k \to \infty$.

[11] Uzasadnienie tego twierdzenia podano w rozdziale drugim.

— Wielomiany charakterystyczne sieci po usunięciu wszystkich gałęzi $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$ węzła μ (po zlikwidowaniu węzła μ) wyrażają się wzorami

$$\left.\begin{aligned} \bar{W}^\mu &= \frac{\partial^\mu W}{\partial k_1 \partial k_2 \ldots \partial k_\mu} \\ W^\mu &= W_{|k_1=0,\, k_2=0,\, \ldots,\, k_\mu=0} = \frac{W \circ (k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \ldots k_\mu)}{k_1 \cdot k_2 \ldots k_\mu} \end{aligned}\right| \qquad (48)$$

Wielomiany charakterystyczne sieci można obliczać wieloma sposobami. Jednym z praktycznych sposobów jest obliczanie iloczynów sieciowych sum węzłowych lub oczkowych w myśl wzorów (30) i (31). Można tutaj zastosować szereg uproszczeń w wykonywaniu poszczególnych operacji obliczeniowych. Dla przykładu podamy kilka prostych przekształceń prowadzących do uproszczenia obliczeń:

$$a \circ \left({}_s\prod {}_s\sum\right) = a \cdot \left({}_s\prod {}_s\sum{}_{|a=0}\right) \qquad (49)$$

$$\left({}_s\prod {}_s\sum\right)(a) = \frac{\partial \left({}_s\prod {}_s\sum\right)(a)}{\partial a} \cdot a + \left({}_s\prod {}_s\sum\right)(a)_{|a=0} \qquad (50)$$

$$\frac{\partial \left[\left({}_s\prod {}_s\sum\right) \circ {}_s\sum(a)\right]}{\partial a} = {}_s\prod {}_s\sum \qquad (51)$$

$$\frac{\partial \left[\left({}_s\prod {}_s\sum\right) \circ \left({}_s\sum_1(a)\right) \circ \left({}_s\sum_2(a)\right)\right]}{\partial a} = \left({}_s\prod {}_s\sum\right) \circ \left[{}_s\sum_1(a) \oplus {}_s\sum_2(a)\right| \qquad (52)$$

$$\frac{\partial \left[\left({}_s\prod {}_s\sum\right) \circ \left({}_s\sum_1(a)\right) \circ \left({}_s\sum_2(a)\right) \circ \left({}_s\sum_3(a)\right)\right]}{\partial a} =$$

$$= \left({}_s\prod {}_s\sum\right) \circ \left[{}_s\sum_1(a) \oplus {}_s\sum_2(a)\right| \circ \left[{}_s\sum_2(a) \oplus {}_s\sum_3(a)\right| \qquad (52')$$

W powyższych wzorach ${}_s\sum(a)$ oznacza sumę sieciową zawierającą wielkość a, zaś $({}_s\prod {}_s\sum)(a)$ — iloczyn sieciowy sum sieciowych zawierający wielkość a.

Przykłady:

$$a \circ (a+b) \circ (a+c) \circ (d+f) = abc(d+f)$$

$$(a+b) \circ (a+c) \circ (d+f) = (b+c) \cdot (d+f)a + bc(d+f)$$

$$\frac{\partial[(a+b) \circ (c+d)]}{\partial a} = c+d$$

$$\frac{\partial[(a+b) \circ (a+c) \circ (a+d) \circ (f+g)]}{\partial a} =$$

$$= (f+g) \circ (b+c) \circ (c+d) = (f+g)[c(b+d)+bd].$$

Inna metoda tworzenia wielomianów charakterystycznych polega na tworzeniu wszystkich kombinacji gałęzi $C_b^{v-1}=C_b^n$ i wybraniu tylko tych kombinacji, które spełniają podane w definicji właściwości wielomianów charakterystycznych.

Metodę tę nazwiemy metodą zero-jedynkową tworzenia wielomianów charakterystycznych.

Dla przykładu podamy obliczenie wielomianów charakterystycznych sieci pokazanej na rys. 1 metodą zero-jedynkową.

1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1

Reguła tworzenia tablicy zero-jedynkowej jest następująca. Kolejne wiersze tablicy, której kolumny reprezentują poszczególne gałęzie sieci, wypełniamy z lewa w prawo. Niech jedynka w kolumnie danej gałęzi oznacza przerwanie (rozwarcie) tej gałęzi. Piszemy jedynkę tylko wtedy, gdy ona wraz z poprzednimi w danym wierszu nie powoduje oddzielenia ani jednego węzła sieci. W przeciwnym przypadku piszemy zero. W następnym wierszu przepisujemy od lewa jedynki z wiersza poprzedniego a tę ostatnią jedynkę, która się da przesunąć w prawo, przesuwamy w prawo, pisząc zero w kolumnie jej poprzedniego położenia. Poszczególne wiersze o n jedynkach wypełnionej w ten sposób tablicy reprezentują iloczyny impedancyjne (jedynki) lub admitancyjne (zera).

Można także wypełniać tablicę zero-jedynkową posługując się pojęciem drzewo.

Metoda zero-jedynkowa ze względu na prostotę operacji logicznych jest szczególnie przydatna przy mechanizacji lub automatyzacji obliczeń i analizy sieci elektrycznych, o czym piszemy w rodziale trzecim.

2. OBLICZANIE PARAMETRÓW SIECI METODĄ WIELOMIANÓW CHARAKTERYSTYCZNYCH

W wyniku rozwiązania układu $(v-1)$ węzłowych równań liniowych sieci elektrycznej otrzymujemy następujące wyrażenie na admitancję $Y_{\mu\nu}$ mierzoną między dwoma węzłami μ i ν:

$$Y_{\mu\nu} = \frac{A}{A_{\mu\nu}}, \tag{53}$$

gdzie A — główny wyznacznik admitancyjny układu $(v-1)$ równań węzłowych sieci,

$A_{\mu\nu}$ — główny wyznacznik admitancyjny układu $(v-2)$ równań węzłowych sieci, w której węzły μ i ν są zwarte ze sobą.

Zbudujemy następujący ciąg zbiorów sieci elektrycznych:

S_{v-1} — sieć pierwotna o v węzłach,

S_{v-2} — zbiór $\frac{v(v-1)}{2}$ sieci powstałych przez kolejne zwieranie par węzłów sieci S_{v-1},

S_{v-3} — zbiór $\frac{v(v-1)^2(v-2)}{2^2}$ sieci powstałych przez kolejne zwieranie par węzłów wszystkich sieci zbioru S_{v-2},

. . . .

S_1 — zbiór $\frac{v(v-1)^2(v-2)^2 \ldots 2}{2^{v-2}}$ sieci powstałych przez kolejne zwieranie par węzłów wszystkich sieci zbioru S_2.

W ten sposób zdefiniowany ciąg zbiorów sieci:

$$S_1 . S_2, S_3 \ldots S_{v-2}, S_{v-1}$$

jest jednoznacznie określony, a reguła tworzenia zbioru $S_{\mu-1}$ ze zbioru S_μ jest niezmienna i powtarzalna dla każdego zbioru ciągu.

Stwierdzamy, że dla wszystkich sieci dwuwęzłowych zbioru sieci S_1 główne wyznaczniki admitancyjne są sumą admitancji gałęzi łączących oba węzły sieci.

Możemy więc dla dowolnej r-tej sieci zbioru S_1 napisać:

$$^{r}_{1}A = {}^{r}_{1}\underline{W},$$

gdzie

$^{r}_{1}A$ jest głównym wyznacznikiem r-tej sieci zbioru S_1,

$^{r}_{1}\underline{W}$ jest wielomianem admitancyjnym r-tej sieci zbioru S_1.

Zakładając, że dla wszystkich sieci zbioru S_λ (gdzie $1 < \lambda < v - 1$) zachodzi równość

$$^{p}_{\lambda}A = {}^{p}_{\lambda}W,$$

gdzie

$^{p}_{\lambda}A$ jest głównym wyznacznikiem admitancyjnym dowolnej p-tej sieci zbioru S_λ,

$^{p}_{\lambda}\underline{W}$ jest wielomianiem admitancyjnym tej samej p-tej sieci zbioru S_λ, .

możemy dla dowolnej q-tej sieci zbioru $S_{\lambda+1}$ napisać następujące wyrażenie na admitancję sieci mierzoną między węzłami μ i ν:

$$Y_{\mu\nu} = \frac{{}^{q}_{\lambda+1}A}{{}^{p}_{\lambda}A_{\mu\nu}} = \frac{{}^{p}_{\lambda}\underline{W}\sum y_{\mu\nu} + {}^{q}_{\lambda+1}A|_{y_{\mu\nu}=0}}{{}^{p}_{\lambda}\underline{W}_{\mu\nu}},$$

czyli

$${}^{q}_{\lambda+1}A = {}^{p}_{\lambda}\underline{W}_{\mu\nu} \cdot {}_{s}\sum y_{\mu\nu} + {}^{q}_{\lambda+1}A|_{y_{\mu\nu}=0}.$$

Wielomian admitancyjny ${}^{p}_{\lambda}\underline{W}_{\mu\nu}$ oraz wyrażenie ${}^{q}_{\lambda+1}A|_{y_{\mu\nu}=0}$ nie zawierają admitancji $y_{\mu\nu}$. Możemy więc stwierdzić, że w wielomianie ${}^{q}_{\lambda+1}A$ istnieją wszystkie iloczyny admitancyjne zawierające $y_{\mu\nu}$ a brak jest iloczynów admitancji gałęzi, które tworzą przynajmniej jedno oczko.

Stwierdzenie to dotyczy wszystkich sieci zbioru $S_{\lambda+1}$, można więc napisać dla dowolnej q-tej sieci zbioru $S_{\lambda+1}$ następującą równość

$${}^{q}_{\lambda+1}A = {}^{q}_{\lambda+1}\underline{W}.$$

Stwierdzamy zatem, że *główny wyznacznik admitancyjny układu* $(v-1)$ *równań węzłowych sieci jest równy wielomianowi admitancyjnemu tej sieci*, czyli

$$\boxed{A = \underline{W}}. \tag{54}$$

Zatem również

$$A_{\mu\nu} = \underline{W}_{\mu\nu}. \tag{55}$$

Elementy głównej przekątnej wyznacznika admitancyjnego stopnia $(v-1)$ są sumami węzłowymi. Na podstawie wzoru (54) stwierdzamy zatem, że *główny wyznacznik admitancyjny sieci jest równy iloczynowi sieciowemu elementów głównej przekątnej wyznacznika.*

$$\boxed{A = {}_{s}\prod_{1}^{v-1} a_{kk}} \tag{56}$$

gdzie $a_{kk} = {}_{s}\sum_{\mu_k}$.

Główny wyznacznik impedancyjny B sieci jest zbudowany identycznie jak wyznacznik admitancyjny z tym, że elementy jego głównej przekątnej są sumami oczkowymi. Tak więc *główny wyznacznik impedancyjny sieci jest równy wielomianowi impedancyjnemu tej sieci:*

$$\boxed{B = \underline{W}} \quad \text{i} \quad \boxed{B = {}_{s}\prod_{1}^{n} b_{kk}}, \tag{57}$$

gdzie $b_{kk} = {}_{s}\sum_{m_k}$.

Z powyższego wynika, że zerowe wyznaczniki macierzy osobliwych sieci są równe iloczynom sieciowym v sum węzłowych lub $(n+1)$ sum oczkowych, a zatem

$$ {}_s\prod^{n+1} {}_s\sum_{m} = {}_s\prod^{v} {}_s\sum_{\mu} = 0 . \tag{58}$$

Z wzorów (53), (54) i (55) wynika, że *admitancja sieci mierzona między węzłami* μ *i* ν *jest równa wielomianowi admitancyjnemu sieci podzielonemu przez wielomian admitancyjny sieci o zwartych ze sobą węzłach* μ *i* ν.

Uwzględniając wzory (39) i (44) możemy więc napisać następujący wzór na admitancję sieci mierzoną między węzłami μ i ν:

$$\boxed{Y_{\mu\nu} = \frac{\underline{W}}{\underline{W}_{\mu\nu}} = \frac{\underline{W}}{{}_s\sum\limits_{s=0}^{s=g} \dfrac{\partial \underline{W}}{\partial k_s}} = \frac{\underline{W}}{\left({}_s\sum\limits_{\mu} \oplus {}_s\sum\limits_{\nu}\right) \circ {}_s\prod\limits_{1}^{v-3} {}_s\sum\limits_{\pi}}} \tag{59}$$

gdzie $k_0, k_1, \ldots, k_s, \ldots, k_g$ oznaczają admitancje gałęzi łączących szeregowo węzły μ i ν, a π jest różne od μ i ν. Impedancja sieci mierzona między węzłami μ i ν wynosi:

$$Z_{\mu\nu} = \frac{1}{Y_{\mu\nu}} = \frac{\underline{W}_{\mu\nu}}{\underline{W}} .$$

Gdy uwzględnimy wzory (2) i (40), otrzymamy:

$$\boxed{Z_{\mu\nu} = \frac{\overline{W}_{\mu\nu}}{\overline{W}} = \frac{\overline{W} \circ {}_s\sum\limits_{s=0}^{s=g} k_s}{\overline{W}}} \tag{60}$$

gdzie $k_0, k_1 \ldots, k_s, \ldots, k_g$ oznaczają impedancje gałęzi łączących szeregowo węzły μ i ν.

A zatem *impedancja sieci mierzona między węzłami* μ i ν *jest równa wielomianowi impedancyjnemu sieci o zwartych ze sobą węzłach* μ i ν *podzielonemu przez wielomian impedancyjny sieci.*

Ogólnie można napisać:

$$\boxed{Z_{\mu\nu} = \frac{W_{\mu\nu}}{W}} \tag{61}$$

i

$$\boxed{Y_{\mu\nu} = \frac{W}{W_{\mu\nu}}} \tag{62}$$

Impedancja sieci mierzona między węzłami μ i ν jest równa stosunkowi wielomianów charakterystycznych sieci o zwartych ze sobą węzłach μ i ν i sieci o nie zwartych węzłach μ i ν.

Admitancja sieci mierzona między węzłami μ i ν jest równa stosunkowi wielomianów charakterystycznych sieci i sieci o zwartych ze sobą węzłach μ i ν.

Przykłady: Dla sieci pokazanej na rys. 1 obliczymy $Z_{\mu_2\mu_5}$, $Z_{\mu_3\mu_5}$ i $Y_{\mu_3\mu_4}$.

Mianowicie

$$Z_{\mu_2\mu_5}=\frac{\overline{W}\circ\overline{5}}{\overline{W}}=\frac{\overline{7}(\overline{2}+\overline{3}+\overline{6})\circ(\overline{4}+5+\overline{6})\circ\overline{5}}{\overline{7}(\overline{2}+\overline{3}+\overline{6})\circ(\overline{4}+\overline{5}+\overline{6})},$$

$$Z_{\mu_3\mu_5}=\frac{\overline{W}\circ(\overline{2}+\overline{5})}{\overline{W}}=\frac{(\overline{2}+\overline{3}+\overline{6})\circ(\overline{4}+\overline{5}+\overline{6})\circ(\overline{2}+\overline{5})}{(\overline{2}+\overline{3}+\overline{6})\circ(\overline{4}+\overline{5}+\overline{6})}.$$

$$Y_{\mu_3\mu_4}=\frac{\underline{W}}{\left({}_s\sum\limits_{\mu_3}\oplus{}_s\sum\limits_{\mu_4}\right)\circ{}_s\prod\limits_{1}^{v-3}{}_s\sum\limits_{\pi}}=\frac{(\underline{4}+\underline{5})\circ(\underline{2}+\underline{3})\circ(\underline{3}+\underline{4}+\underline{6})}{(\underline{4}+\underline{5})\circ(\underline{2}+\underline{4}+\underline{6})}.$$

Impedancję $Z_{\mu\nu}$ i admitancję $Y_{\mu\nu}$ jako funkcje parametrów gałęzi k można na podstawie wzorów (59) i (60) wyrazić ogólnie w nastąpujących postaciach:

$$Z_{\mu\nu}=\frac{A'\overline{k}+B'}{C'\overline{k}+D'},$$

$$Y_{\mu\nu}=\frac{A''\underline{k}+B''}{C''\underline{k}+D''}.$$

Funkcje te są jednorodne pierwszego stopnia, a zatem na podstawie twierdzenia Eulera o funkcjach jednorodnych można napisać

$$\boxed{Z_{\mu\nu}=\sum_{k=1}^{k=b}\frac{\partial Z_{\mu\nu}}{\partial\overline{k}}\cdot\underline{k}} \tag{63}$$

$$\boxed{Y_{\mu\nu}=\sum_{k=1}^{k=b}\frac{\partial Y_{\mu\nu}}{\partial\underline{k}}\cdot\underline{k}} \tag{64}$$

Dla sieci zasilanej z m źródeł prądowych a mianowicie: w węzłach μ_1 i ν_1 prądem I_1, w węzłach μ_2 i ν_2 prądem I_2 itd. otrzymujemy uwzględniając wzór (63)

$$\sum_{k=1}^{k=b} I_k^2 \overline{k} = \sum_{r=1}^{r=m} \left(I_r^2 \sum_{k=1}^{k=b} \frac{\partial Z_r}{\partial \overline{k}} \cdot \overline{k} \right)$$

skąd po przekształceniu otrzymujemy:

$$\boxed{I_k = \sum_{r=1}^{r=m} I_r \sqrt{\frac{\partial Z_r}{\partial \overline{k}}} = \sum_{r=1}^{r=m} \frac{E_r}{Z_r} \sqrt{\frac{\partial Z_r}{\partial \overline{k}}}} \tag{65}$$

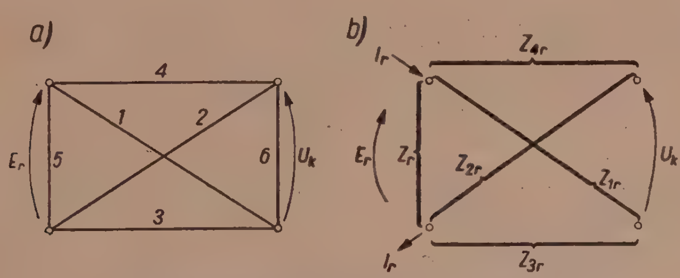
i analogicznie

$$\boxed{U_k = \sum_{r=1}^{r=m} E_r \sqrt{\frac{\partial Y_r}{\partial \underline{k}}} = \sum_{r=1}^{r=m} \frac{I_r}{Y_r} \sqrt{\frac{\partial Y_r}{\partial \underline{k}}}} \tag{66}$$

gdzie I_k — prąd płynący w gałęzi k,
U_k — napięcie na gałęzi k,
Z_r — impedancja sieci widziana od strony r-tego źródła zasilania,
Y_r — admitancja sieci widziana od strony r-tego źródła zasilania.

Wzory (65) i (66) pozwalają obliczać rozpływ prądów i rozkład napięć w sieci na podstawie obliczonych impedancji i admitancji sieci widzianych od strony źródeł zasilania.

Sieć zasilaną idealną SEM E_r zastępujemy impedancyjnym czworobokiem zupełnym, stanowiącym czwórnik o wejściu zasilanym przez SEM E_r



Rys. 5. a) graf czwórnika zasilanego napięciem E_r
b) impedancje mierzone na końcówkach czwórnika

i o końcówkach wyjściowych, między którymi istnieje napięcie U_k (rys. 5a).

Obliczając dowolną metodą napięcie U_k otrzymujemy wyrażenie:

$$U_k = E_r \frac{\overline{6}(\overline{1}\cdot\overline{2} - \overline{3}\cdot\overline{4})}{\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{3} + \overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{4} + \overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{6} + \overline{1}\cdot\overline{3}\cdot\overline{4} + \overline{1}\cdot\overline{4}\cdot\overline{6} + \overline{2}\cdot\overline{3}\cdot\overline{4} + \overline{2}\cdot\overline{3}\cdot\overline{6} + \overline{3}\cdot\overline{4}\cdot\overline{6}}$$

Licznik i mianownik tego wyrażenia podwajamy i mnożymy przez impedancję $\overline{5}$, po czym do licznika dodajemy następujący wielomian impedancji, którego wartość jest równa zero:

$$\begin{aligned}
&\overline{1}\cdot(\overline{2}\cdot\overline{3}\cdot\overline{4}+\overline{2}\cdot\overline{3}\cdot\overline{6}+\overline{2}\cdot\overline{4}\cdot\overline{5}+\overline{3}\cdot\overline{4}\cdot\overline{5}+\overline{3}\cdot\overline{4}\cdot\overline{6}+\overline{3}\cdot\overline{5}\cdot\overline{6}+\overline{4}\cdot\overline{5}\cdot\overline{6})+\\
&+\overline{2}\cdot(\overline{1}\cdot\overline{3}\cdot\overline{4}+\overline{1}\cdot\overline{3}\cdot\overline{5}+\overline{1}\cdot\overline{4}\cdot\overline{6}+\overline{3}\cdot\overline{4}\cdot\overline{5}+\overline{3}\cdot\overline{4}\cdot\overline{6}+\overline{3}\cdot\overline{5}\cdot\overline{6}+\overline{4}\cdot\overline{5}\cdot\overline{6})-\\
&-\overline{4}\cdot(\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{3}+\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{5}+\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{6}+\overline{1}\cdot\overline{3}\cdot\overline{5}+\overline{1}\cdot\overline{5}\cdot\overline{6}+\overline{2}\cdot\overline{3}\cdot\overline{6}+\overline{2}\cdot\overline{5}\cdot\overline{6})\\
&-\overline{3}\cdot(\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{4}+\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{5}+\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{6}+\overline{1}\cdot\overline{4}\cdot\overline{6}+\overline{1}\cdot\overline{5}\cdot\overline{6}+\overline{2}\cdot\overline{4}\cdot\overline{5}+\overline{2}\cdot\overline{5}\cdot\overline{6})
\end{aligned}$$

i wreszcie licznik i mianownik dzielimy przez następujący wielomian impedancyjny

$$\begin{aligned}
\overline{W}=&\,\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{3}+\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{4}+\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{5}+\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{6}+\overline{1}\cdot\overline{3}\cdot\overline{4}+\overline{1}\cdot\overline{3}\cdot\overline{5}+\overline{1}\cdot\overline{4}\cdot\overline{6}+\\
&+\overline{1}\cdot\overline{5}\cdot\overline{6}+\overline{2}\cdot\overline{3}\cdot\overline{4}+\overline{2}\cdot\overline{3}\cdot\overline{6}+\overline{2}\cdot\overline{4}\cdot\overline{5}+\overline{2}\cdot\overline{5}\cdot\overline{6}+\overline{3}\cdot\overline{4}\cdot\overline{5}+\\
&+\overline{3}\cdot\overline{4}\cdot\overline{6}+\overline{3}\cdot\overline{5}\cdot\overline{6}+\overline{4}\cdot\overline{5}\cdot\overline{6}.
\end{aligned}$$

Otrzymane w ten sposób wyrażenie na U_k można uporządkować w następujący sposób:

$$U_k=E_r\cdot\frac{\left[\dfrac{\overline{1}\circ\overline{W}}{\overline{W}}+\dfrac{\overline{2}\circ\overline{W}}{\overline{W}}\right]-\left[\dfrac{\overline{4}\circ\overline{W}}{\overline{W}}+\dfrac{\overline{3}\circ\overline{W}}{\overline{W}}\right]}{2\cdot\dfrac{\overline{5}\circ\overline{W}}{\overline{W}}}$$

W myśl wzoru (60) wyrażenie powyższe otrzymuje postać

$$U_k=E_r\,\frac{(Z_{1r}+Z_{2r})-(Z_{3r}+Z_{4r})}{2\cdot Z_r}, \tag{67}$$

gdzie oznaczenia Z_r, Z_{1r}, Z_{2r}, Z_{3r}, Z_{4r}, podane na rys. 5b, oznaczają odpowiednie impedancje sieci.

Gdy sieć zasilana jest przez m SEM-nych $E_1, E_2, \ldots, E_m$, wtedy uwzględniając prawo superpozycji mamy

$$\boxed{U_k=\sum_{r=1}^{r=m}E_r\,\frac{(Z_{1r}+Z_{2r})-(Z_{3r}+Z_{4r})}{2\cdot Z_r}} \tag{68}$$

Uwzględniając wzór (60) i przekształcając wyrażenie (68) otrzymujemy wyrażenie na napięcie $U_{\nu_1\nu_2}$ między węzłami ν_1 i ν_2 sieci o kierunkowości $\nu_1\rightarrow\nu_2$

$$\boxed{U_{\nu_1\nu_2} = \frac{\sum\limits_{r=1}^{r=m} E_r A_r}{\underline{W}} = \frac{\sum\limits_{r=1}^{r=m} E_r B_r}{\overline{W}}} \tag{69}$$

gdzie

E_r — SEM-na r-tego źródła zasilania sieci między węzłami μ_{r_1} i μ_{r_2} o kierunkowości μ_{r_1} i μ_{r_2}

$$A_r = \frac{1}{2}\left[\left(\underline{W}^r_{\nu_1\mu r_2} + \underline{W}^r_{\nu_2\mu r_1}\right) - \left(\underline{W}^r_{\nu_1\mu r_1} + \underline{W}^r_{\nu_2\mu r_2}\right)\right] \tag{70}$$

$$B_r = \frac{1}{2}\left[\left(\overline{W}^r_{\nu_1\mu r_2} + \overline{W}^r_{\nu_2\mu r_1}\right) - \left(\overline{W}^r_{\nu_1\mu r_1} + \overline{W}^r_{\nu_2\mu r_2}\right)\right] \tag{71}$$

$\underline{W}$ i $\overline{W}$ — wielomiany charakterystyczne sieci zwartej przez źródło zasilania E_r.

Wzór (69) pozwala obliczyć napięcia między węzłami sieci za pomocą wielomianów impedancyjnych względnie admitancyjnych.

W przypadku jednego źródła zasilania E_r ogólna postać wzoru (69) przedstawia się następująco

$$U_{\nu_1\nu_2} = E_r \cdot \frac{\frac{1}{2}\left[\left(W^r_{\nu_1\mu r_2} + W^r_{\nu_2\mu r_1}\right) - \left(W^r_{\nu_1\mu r_1} + W^r_{\nu_2\mu r_2}\right)\right]}{W} \tag{69'}$$

Wyrażenie to po uwzględnieniu wzoru (38) przybiera postać

$$U_{\nu_1\nu_2} = \frac{E_r}{W} \cdot \frac{1}{2}\left\{\left[\left(W^r_{\nu_1\nu_2} \oplus W^r_{\nu_2\mu r_2}\right) + \left(W^r_{\mu r_1\mu r_2} \oplus W^r_{\nu_2\mu r_2}\right)\right] - \left[\left(W^r_{\nu_1\nu_2} \oplus W^r_{\mu r_1\mu r_2} \oplus W^r_{\nu_2\mu r_2}\right) + W^r_{\nu_2\mu r_2}\right]\right\}. \tag{69''}$$

W tym wyrażeniu mamy trzy następujące wielkości, które wyrażamy w postaci sum:

$$W^r_{\mu r_1\mu r_2} = W = a + b + c + d,$$

$$W^r_{\nu_1\nu_2} = a + b + f + g,$$

$$W^r_{\nu_2\mu r_2} = a + c + f + h.$$

Po wstawieniu tych sum do wyrażenia (69″) otrzymamy w wyniku

$$U_{\nu_1\nu_2} = \frac{E_r}{W}(b - a) = \frac{E_r}{W}[(a + b) - 2a].$$

Ponieważ

$$(a+b)=W \wedge W^r_{\nu_1\nu_2}$$

i

$$a=W \wedge W^r_{\nu_1\nu_2} \wedge W^r_{\nu_2\mu r_2}$$

przeto

$$\boxed{U_{\nu_1\nu_2}=\frac{E_r}{W}\left[(W \wedge W^r_{\nu_1\nu_2})-2(W \wedge W^r_{\nu_1\nu_2} \wedge W^r_{\nu_2\mu r_2})\right]} \tag{70}$$

gdzie symbol $\wedge$ oznacza iloczyn logiczny (konjunkcję). Jeśli w wyrażeniu (69′) uwzględnimy następujące zależności

$$W=W^r_{\nu_1\mu r_2} \oplus W^r_{\nu_2\mu r_2}=W^r_{\nu_2\mu r_1} \oplus W^r_{\nu_1\mu r_1}$$

i

$$W^r_{\nu_1\nu_2}=W^r_{\nu_1\mu r_2} \oplus W^r_{\nu_1\mu r_1}=W^r_{\nu_2\mu r_1} \oplus W^r_{\nu_2\mu r_2}$$

oraz założymy, że

$$U_{\nu_1\nu_2}=+U'_{\nu_1\nu_2}-U''_{\nu_1\nu_2} \tag{71}$$

to po przekształceniach otrzymamy

$$\boxed{U'_{\nu_1\nu_2}+U''_{\nu_2\nu_2}=\frac{E_r}{W}(W \wedge W^r_{\nu_1\nu_2})} \tag{72}$$

Porównując wzory (70), (71) i (72) otrzymujemy:

$$\boxed{U'_{\nu_1\nu_2}=\frac{E_r}{W}\left[(W \wedge W^r_{\nu_1\nu_2})-(W \wedge W^r_{\nu_1\nu_2} \wedge W^r_{\nu_2\mu r_2})\right]} \tag{73}$$

i

$$\boxed{U''_{\nu_1\nu_2}=\frac{E_r}{W}(W \wedge W^r_{\nu_1\nu_2} \wedge W^r_{\nu_2\mu r_2})} \tag{74}$$

Z przytoczonych przekształceń wynika, że we wzorach (70) ÷ (74) wyrażenie $W^r_{\nu_2\mu r_2}$ można zamienić na $W^r_{\nu_1\mu r_1}$. Wielkości te oznaczymy przez $W\pm\pm$.

P r z y k ł a d. W sieci pokazanej na rys. 6 obliczyć napięcia U_2 i U_5.

$$\overline{W}=(\bar{1}+\bar{4}+\bar{5})\circ(\bar{1}+\bar{3}+\bar{6})\circ(\bar{2}+\bar{3}+\bar{4})=$$

$$=\bar{1}\cdot\bar{2}\cdot\bar{3}+\bar{1}\cdot\bar{2}\cdot\bar{6}+\bar{1}\cdot\bar{2}\cdot\bar{4}+\bar{2}\cdot\bar{3}\cdot\bar{4}+\bar{2}\cdot\bar{4}\cdot\bar{6}+\bar{1}\cdot\bar{2}\cdot\bar{5}+$$

$$+\bar{2}\cdot\bar{3}\cdot\bar{5}+\bar{2}\cdot\bar{5}\cdot\bar{6}+\bar{1}\cdot\bar{3}\cdot\bar{6}+\bar{3}\cdot\bar{4}\cdot\bar{6}+\bar{1}\cdot\bar{3}\cdot\bar{5}+\bar{3}\cdot\bar{5}\cdot\bar{6}+$$
$$+\bar{1}\cdot\bar{4}\cdot\bar{6}+\bar{1}\cdot\bar{4}\cdot\bar{5}+\bar{3}\cdot\bar{4}\cdot\bar{5}+\bar{4}\cdot\bar{5}\cdot\bar{6},$$

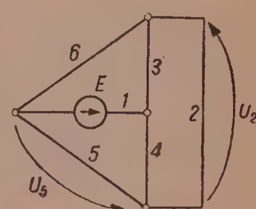
$$\overline{W}_2^1=\frac{\partial\overline{W}}{\partial\bar{1}}\circ\bar{2}=\bar{2}\cdot\bar{3}\cdot\bar{6}+\bar{2}\cdot\bar{3}\cdot\bar{5}+\bar{2}\cdot\bar{4}\cdot\bar{6}+\bar{2}\cdot\bar{4}\cdot\bar{5},$$

$$\overline{W}_3^1=\frac{\partial\overline{W}}{\partial\bar{1}}\circ\bar{3}=\bar{2}\cdot 3\cdot\bar{6}+\bar{2}\cdot\bar{3}\cdot\bar{4}+2\cdot\bar{3}\cdot\bar{5}+\bar{3}\cdot\bar{4}\cdot\bar{6}+\bar{3}\cdot 4\cdot 5$$

$$U_2=\frac{E}{\overline{W}}\cdot\bar{2}(\bar{4}\cdot\bar{6}-\bar{3}\cdot\bar{5});$$

$$\overline{W}_5^1=\frac{\partial\overline{W}}{\partial\bar{1}}\circ\bar{5}=\bar{2}\cdot\bar{3}\cdot\bar{5}+\bar{2}\cdot\bar{5}\cdot\bar{6}+\bar{2}\cdot\bar{4}\cdot\bar{5}+\bar{3}\cdot\bar{5}\cdot\bar{6}+\bar{4}\cdot\bar{5}\cdot\bar{6}$$

$$U_5=\frac{E}{\overline{W}}\cdot\bar{5}(\bar{2}\cdot\bar{3}+\bar{2}\cdot\bar{6}+\bar{3}\cdot\bar{6}+\bar{4}\cdot\bar{6}).$$



Rys. 6.

Jeśli wzór (70) zastosujemy do obliczenia napięcia między węzłem μ_{r_1} a dowolnym innym węzłem np. ν_1, to otrzymamy

$$U_{\mu r_1 \nu_1}=\frac{E_r}{W}(W\wedge W^r_{--}). \tag{75}$$

Dla uproszczenia oznaczeń wprowadzimy następujące określenia i symbole umowne:

— węzeł μ_{r_1} (biegun ujemny źródła zasilania E_r lub początek strzałki zwrotu E_r) będziemy oznaczać przez —,
— napięcie między dowolnym węzłem ν a węzłem μ_{r1} nazywać będziemy potencjałem $V_{-\nu}$ węzła ν,
— wielomian charakterystyczny sieci z rozwartą gałęzią źródła zasilania E_r i zwartymi węzłami μ_{r_1} i ν oznaczać będziemy symbolem $W^r_{-\nu}$ (np. W^r_{-+}, gdy ν ma znak $+$),
— napięcie między węzłami ν i ξ oznaczać będziemy przez $U_{\nu\xi}$, przy czym

$$U_{\nu\xi}=V_{-\xi}-V_{-\nu}(=V_{+\xi}-V_{+\nu}) \tag{76}$$

— napięcie ${}_sU_{\nu\xi}=V_{-\xi}\oplus V_{-\nu}=V_{+\xi}\oplus V_{+\nu}$ nazywać będziemy n a p i ę c i e m s i e c i o w y m,
— dowolną drogę między węzłami μ_{r_1} i ν (wzgl. ν i ξ) oznaczać będziemy przez $l_{-\nu}$ (wzgl. $l_{\nu\xi}$) przy czym

$$l_{-\nu}={}_s\sum_{-\nu} l_p \qquad \left(\text{wzgl. } l_{\nu\xi}={}_s\sum_{\nu\xi} l_p\right),$$

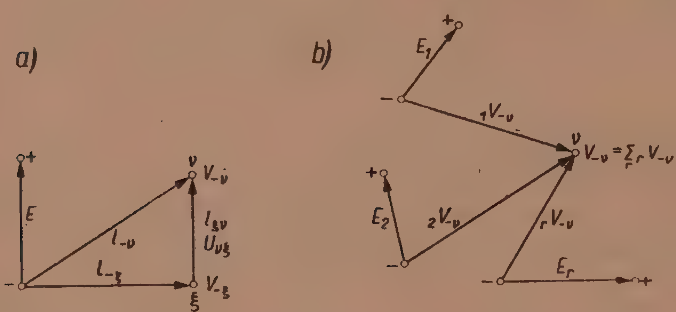
gdzie l_p oznacza poszczególne gałęzie na drodze $l_{-\nu}$ (wzgl. $l_{\nu\xi}$).

Rys. 7a. obrazuje powyższe pojęcia i oznaczenia.
Poprzednie wzory przyjmą zatem następujące postacie:

$$U_{\nu\xi} = \frac{E_r}{W} [(W \wedge W^r_{\nu\xi}) - 2(W \wedge W^r_{\nu\xi} \wedge W^r_{\pm\pm})];^{12} \tag{70'}$$

$$_sU_{\nu\xi} = \frac{E_r}{W} (W \wedge W^r_{\nu\xi}), \tag{72'}$$

$$\boxed{V_{-\nu} = \frac{E_r}{W} (W \wedge W^r_{-\nu})}. \tag{75'}$$



Rys. 7. Graficzne przedstawienie obliczenia potencjału węzła w sieci zasilanej przez: a) jedno źródło napięciowe E, b) r źródeł napięciowych $E_1, E_2, \ldots, E_r$

Ponieważ $V_{-\nu} = {}_sV_{-\nu}$, przeto wzór (72′) jest wzorem ogólnym. A zatem *napięcie sieciowe między dowolnymi węzłami* ν i ξ *sieci zasilanej przez źródło* E_r *jest równe iloczynowi konjunkcji* $(W \wedge W^r_{\nu\xi})$ i $\left(\frac{E_r}{W}\right)$.

Wzór (75′) wyrazimy słownie: *potencjał węzła* ν *sieci zasilanej przez źródło* E_r *jest równy iloczynowi konjunkcji* $(W \wedge W^r_{-\nu})$ i $\left(\frac{E_r}{W}\right)$.

Dla sieci zasilanej przez wiele źródeł napięciowych potencjał węzła ν wyrazi się na podstawie prawa superpozycji następującym wzorem (patrz rys. 7b)

$$V_{-\nu} = \frac{1}{W} \sum_r E_r (W \wedge W^r_{-\nu}), \tag{77}$$

a napięcie między węzłami ν i ξ:

$$U_{\nu\xi} = V_{-\xi} - V_{-\nu} = \frac{1}{W} \sum_r E_r [(W \wedge W^r_{-\xi}) - (W \wedge W^r_{-\nu})]. \tag{78}$$

[12] Indeks ±± oznacza węzły o znakach ++ lub −− (pierwszy znak dotyczy węzła zasilania, drugi — węzła obliczanego napięcia).

Wzór ten można uprościć do następującej postaci:

$$\boxed{U_{v\xi}=\frac{1}{W}\sum_{r}E_r[W|\wedge|(W^r_{-\xi}-W^r_{-v})]}\,, \tag{79}$$

gdzie symbol $|\wedge|$ oznacza konjunkcję wielkości bez względu na ich znak (w przypadku różnych znaków wielkość zapisuje się w wyniku ze znakiem ujemnym).

Sumując sieciowo napięcia sieciowe wzdłuż dowolnej drogi zamkniętej otrzymujemy

$$\boxed{{}_s\sum_{\bigcirc}{}_sU=0} \tag{80}$$

czyli *suma sieciowa napięć sieciowych dowolnej drogi zamkniętej jest równa zeru* (II prawo Kirchhoffa wyrażone w algebrze sieciowej).

W przypadku gdy napięciowe źródło zasilania E_r włączone jest w gałąź r oraz gdy obliczamy napięcie na gałęzi k, powyższe wzory ogólne upraszczają się. Wielomian charakterystyczny można wyrazić w postaci:

$$W=A\cdot r+B\cdot k+C\cdot r\cdot k+D, \tag{81}$$

gdzie A, B, C i D nie są funkcjami r i k.
Napięcie sieciowe na gałęzi k

$$_sU_k=\frac{E_r}{W}\cdot\left[W\wedge\frac{\partial(W\circ r)}{\partial k}\right]=\frac{E_r}{W}\cdot B\cdot r \tag{82$^{\mathrm{I}}$}$$

$$_sU_k=\frac{E_r}{\overline{W}}\cdot\left[\overline{W}\wedge\frac{\partial(\overline{W}\circ\overline{k})}{\partial r}\right]=\frac{E_r}{\overline{W}}\cdot\overline{A}\cdot\overline{k}\,. \tag{82$^{\mathrm{II}}$}$$

i ogólnie

$$_sU_k=\frac{E_r}{W}(W\wedge W^r_k) \tag{82$^{\mathrm{III}}$}$$

Prąd sieciowy w gałęzi k:

$$_sI_k=\frac{E_r}{W}\cdot r\cdot k\,(A\wedge B) \tag{83$^{\mathrm{I}}$}$$

i

$$_sI_k=\frac{E_r}{\overline{W}}\cdot(\overline{A}\wedge\overline{B})\,. \tag{83$^{\mathrm{II}}$}$$

Napięcie na gałęzi k:

$$U_k = \frac{E_r}{\underline{W}} \cdot \underline{r} \left[\frac{\partial W}{\partial \underline{r}} \,|\wedge|\, \left({}_s\sum_{-+} \frac{\partial W_{|r=0}}{\partial \underline{l}} - {}_s\sum_{--} \frac{\partial W_{|r=0}}{\partial \underline{l}} \right) \right] \tag{84^{I}}$$

i

$$U_k = \frac{E_r}{\underline{W}} \left[\overline{W}_{|\overline{r}=0} \,|\wedge|\, \left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial r} \circ {}_s\sum_{-+} \overline{l} - \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{r}} \circ {}_s\sum_{--} \overline{l} \right) \right]. \tag{84^{II}}$$

a prąd w gałęzi k:

$$I_k = U_k \cdot \underline{k} = \frac{U_k}{\overline{k}},$$

gdzie ${}_s\sum l$ oznacza sumowanie sieciowe wzdłuż j e d n e j d o w o l n e j drogi między węzłami źródła zasilania i gałęzi k.

Na podstawie wzoru (65) mamy:

$$\boxed{I_k = \frac{E_r}{\underline{W}} \cdot \underline{k} \cdot \underline{r} \cdot \underline{M} = \frac{E_r}{\overline{W}} \cdot \overline{M}}, \tag{85^{I}}$$

gdzie

$$M = \sqrt{\frac{\partial W_{|r=0}}{\partial k} \cdot \frac{\partial W_{|k=0}}{\partial r} - \frac{\partial^2 W}{\partial_k \partial_r} \cdot W_{|k=0,\, r=0}} = \sqrt{AB - CD}\,^{13}. \tag{85^{II}}$$

Z wzorów (85) wynika wyrażenie na prąd sieciowy

$${}_sI_k = \frac{E_r}{\underline{W}} \cdot k \cdot r \cdot {}_s\underline{M} = \frac{E_r}{\overline{W}} \cdot {}_s\overline{M}, \tag{85^{III}}$$

gdzie

$${}_sM = \frac{\partial W_{|r=0}}{\partial k} \wedge \frac{\partial W_{|k=0}}{\partial r} = A \wedge B\,^{13}. \tag{85^{IV}}$$

U w a g a: Obliczanie iloczynu logicznego dwu wielomianów charakterystycznych, danych w postaci nierozwiniętej $W = {}_s\prod {}_s\sum$ można wykonywać stosując wzór:

$${}_1W \wedge {}_2W = x \cdot \left(\frac{\partial_1 W}{\partial x} \wedge \frac{\partial_2 W}{\partial x} \right) + ({}_1W_{|x=0} \wedge {}_2W_{|x=0})$$

i jego dalsze rozwinięcia na inne elementy.

---

[13] Wymierność $M = \sqrt{\begin{vmatrix} AD \\ CB \end{vmatrix}}$ (lub istnienie ${}_sM = A \wedge B > 0$) jest własnością wielomianów charakterystycznych, którą można wykorzystać przy syntezie sieci.

Wzory (85^{I}) i (85^{II}) pozwalają obliczyć parametry sieci bez stosowania algebry sieciowej.

Wyżej podane wzory dotyczyły sieci zasilanych napięciowymi źródłami E_r. Dla sieci zasilanych prądowymi źródłami zasilania wszystkie wzory będą analogiczne. Otrzymuje się je przez podstawienie w miejsce wielomiaru charakterystycznego W wielomianu $'W$ sieci o rozwartych węzłach zasilania μ_r. Między tymi wielomianami zachodzi związek:

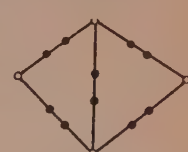
czyli
$$\left.\begin{aligned} 'W &= W^r \\ W &= 'W_r \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

W celu ograniczenia objętości artykułu wzorów tych nie będziemy podawać. Zaznaczymy jedynie, że wynika z nich analogiczny do (80) wzór:

$$\boxed{{}_s\sum_{\mu} {}_s I = 0} \tag{80}$$

co oznacza, że s u m a s i e c i o w a p r ą d ó w s i e c i o w y c h w ę z ł a j e s t r ó w n a z e r u (I prawo Kirchhoffa wyrażone w algebrze sieciowej).

Wprowadzimy obecnie pojęcie g r a f u f i z y c z n e g o s i e c i. Pod tym pojęciem będziemy rozumieli schemat sieci wykonany za pomocą praktycznie bezoporowych przewodów reprezentujących poszczególne gałęzie sieci. Każdy przewód gałęziowy zaopatrzony jest w wyłącznik, który umożliwia dokonanie przerwy przewodu gałęziowego. W grafie fizycznym nie ma żadnych elementów elektrycznych (impedancji względnie admitancji). Przewody gałęziowe łączy się za pomocą zacisków reprezentujących węzły sieci. Powinna istnieć możliwość włączenia w graf fizyczny zastępczych źródeł zasilania oraz wskaźników napięciowych (względnie prądowych). Przykład schematu grafu fizycznego pokazano na rys. 8. Pojęcie grafu fizycznego sieci posłuży nam do określania napięć i prądów w sieci.



Rys. 8. Przykład grafu fizycznego sieci
-•-•- wyłącznik

Z wzoru (70) po przekształceniu wynikają następujące związki:

$$\boxed{U_k = \frac{E_r}{W} \left(W \wedge W_k^r \wedge W^r_{\substack{+-\\-+}} - W \wedge W_k^r \wedge W^r_{\substack{++\\--}}\right)} \tag{87}$$

i

$$\boxed{W \wedge W_k^r \wedge W^r_{\substack{+-\\-+}} \wedge W^r_{\substack{++\\--}} = 0} \tag{88}$$

A zatem

$$U_k' = \frac{E_r}{W} (W \wedge W_k^r \wedge W^r_{\substack{+-\\-+}}) \tag{89}$$

i

$$U_k'' = \frac{E_r}{W} (W \wedge W_k^r \wedge W^r_{\substack{++\\--}}) \tag{90}$$

$$U_k = U_k' - U_k'' \tag{91}$$

Z wzorów tych wynika, że jeśli do grafu fizycznego sieci włączymy w miejsce źródła zasilania E_r zastępcze źródło zasilania np. prądu stałego i w miejsce obliczanego napięcia — wskaźnik napięciowy, wtedy wyrażenie ujęte w nawiasie we worze (87) jest równe sumie algebraicznej składników wielomianu impedancyjnego sieci (znajdującego się w mianowniku), zawierających impedancje gałęzi, po wyłączeniu których wskaźnik napięciowy wskazuje istnienie napięcia o zwrocie zgodnym lub nie zgodnym z przyjętym. Iloczyny admitancji gałęzi nie wyłączonych stanowią składniki wyrażenia w nawiasie wzoru (87), gdy obliczane napięcie wyrażamy za pomocą admitancji gałęzi. Jeśli wskaźnik wskazuje zwrot (fazę) napięcia zgodny z przyjętym zwrotem, wtedy odpowiedni iloczyn parametru gałęzi otrzymuje znak dodatni, w przeciwnym przypadku — znak ujemny. Gdy nie zwracamy uwagi na kierunek wskazywanego napięcia a wszystkim składnikom przypisujemy znak dodatni, wtedy w wyniku otrzymujemy wartość napięcia sieciowego. Obliczając prąd I_k względnie ${}_sI_k$ postępujemy podobnie, z tą różnicą, że wskaźnik włączamy w gałąź k szeregowo a zatem każdorazowo wyłączamy nie n lecz $(n-1)$ gałęzi (lub włączamy nie $(v-1)$ lecz v gałęzi).

Należy zauważyć, że w przypadku przerwania większej od prawidłowej ilości gałęzi nigdy nie otrzymamy napięcia na wskaźniku, zatem przy dokonywaniu opisanych czynności należy zwracać uwagę jedynie na to, czy nie wyłączyliśmy za mało gałęzi (lub czy nie włączyliśmy za dużo gałęzi).

Na wskaźniku istnieje napięcie tylko wtedy, gdy znajduje się wraz ze źródłem prądu we wspólnym obwodzie zamkniętym (oczku) oraz gdy ani źródło zasilania ani też wskaźnik nie są zwarte jakąkolwiek bądź gałęzią.

Graf fizyczny jako przyrząd może służyć do obliczania parametrów sieci. Będzie o tym mowa w rozdziale trzecim. Pojęciem grafu fizycznego można się posłużyć przy obliczaniu sieci bez użycia przyrządu. Można na przykład za pomocą podanych wzorów obliczyć napięcie względnie prąd sieciowy a następnie posługując się pojęciem grafu fizycznego ustalić znaki poszczególnych składników wielomianu w liczniku.

W wielu przypadkach pojęcie grafu fizycznego pozwala określić prąd lub napięcie bez dokonywania jakichkolwiek obliczeń licznika wyrażenia na te wielkości.

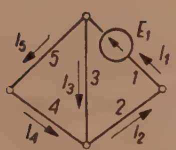
P r z y k ł a d y:

1) Obliczyć prąd we wszystkich gałęziach sieci pokazanej na rys. 9. Operujemy impedancjami gałęzi. Przyjmujemy zwroty prądów zgodne ze strzałkami na rysunku.

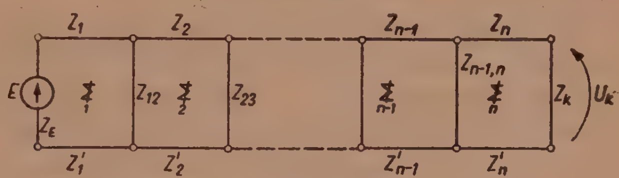
$$I_4 = I_5 = \frac{E_1 \cdot \bar{3}}{\overline{W}}$$

$$\overline{W} = (\bar{1}+\bar{2}+\bar{3}) \circ (\bar{3}+\bar{4}+\bar{5})$$

(jedynie wyłączenie gałęzi 3 umożliwia powstanie napięcia w gałęziach 4 i 5)



Rys. 9.



Rys. 10.

$$I_3 = E_1 \frac{4+5}{\overline{W}}$$

$$I_1 = I_2 = \frac{\bar{3}+\bar{4}+5}{\overline{W}}$$

2) Obliczyć impedancję wejściową (roboczą) oraz przenoszenie linii pokazanej na rys. 10.

$$\overline{W} = {}_s\prod_{1}^{n} {}_s\sum_{m} = (Z_E + Z_1 + Z_1' + Z_{12}) \circ {}_s\prod_{2}^{n} {}_s\sum_{m}$$

$$Z_{we\ rob} = \frac{\overline{W}}{\dfrac{\partial \overline{W}}{\partial Z_E}} = \frac{\overline{W}}{{}_s\prod_{2}^{n} {}_s\sum_{m}}$$

$$\frac{U_k}{E} = \frac{Z_k \cdot Z_{12} \cdot Z_{23} \ldots . Z_{n-1,n}}{\overline{W}}.$$

Z wzorów (87) ÷ (91) wynika stosunkowo prosta metoda obliczania prądów i napięć w sieci.

Tworzymy wszystkie a d m i t a n c y j n e sumy oczkowe[14] o liczbie

---

[14] Admitancyjne sumy oczkowe tworzy się identycznie jak impedancyjne sumy oczkowe ${}_s\sum_{m}$, jedynie zamiast impedancji gałęzi uwzględnia się ich admitancje.

admitancji równej lub mniejszej od ilości węzłów v sieci, a zawierające admitancje gałęzi źródła zasilania i interesującej nas gałęzi. Następnie zamieniamy admitancyjne sumy oczkowe na admitancyjne iloczyny oczkowe przez zamianę symboli dodawania na symbole mnożenia. Admitancyjne iloczyny oczkowe o mniejszej niż v liczbie czynników mnożymy przez iloczyn sieciowy sum węzłowych węzłów, przez które nie przechodzą obwody poszczególnych oczek. Admitancyjnych iloczynów oczkowych zawierających v elementów nie mnożymy przez sumy węzłowe gdyż reprezentowane przez te iloczyny obwody zawierają wszystkie węzły sieci.

Licznik wyrażenia na prąd w gałęzi jest sumą algebraiczną otrzymanych sumo-iloczynów sieciowych. Ich znaki ustalamy posługując się pojęciem grafu fizycznego sieci [15].

W przypadku ogólnym zasilania sieci przez wiele źródeł i obliczania prądów w wielu gałęziach należy utworzyć wszystkie admitancyjne sumy oczkowe sieci, zawierające admitancje wszystkich gałęzi źródeł zasilania i interesujących nas gałęzi — o liczbie elementów równej lub mniejszej od v, a te ostatnie (po zamianie ich na admitancyjne iloczyny oczkowe) pomnożyć w opisany wyżej sposób przez iloczyny sieciowe odpowiednich sum węzłowych. Licznik wyrażenia na prąd w gałęzi jest sumą algebraiczną sumo-iloczynów sieciowych pomnożonych przez właściwe napięcia E źródeł zasilania.

Tworzenie admitancyjnych sum oczkowych odbywa się przez sumowanie sieciowe n admitancyjnych sum oczkowych w różnych kombinacjach. Sumowanie to pozwala utworzyć $(2^n—1)$ sum oczkowych łącznie z powyższymi n sumami oczkowymi.

Dla lepszego zobrazowania opisanej metody podamy dwa przykłady.

1) Obliczyć prąd I_e w gałęzi e sieci pokazanej na rys. 11. ($a, b, \ldots,$ g oznaczają admitancje gałęzi).

Budujemy następującą tablicę:

	a	b	c	d	e	f	g
I	1	1	1				
II			1	1	1		
III					1	1	1
I ⊕ II	1	1		1	1		
I ⊕ III	1	1	1		1	1	1

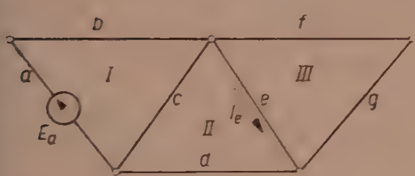
[15] Znaki te ustala się dla oczek reprezentowanych przez admitancyjne iloczyny oczkowe.

Liczba węzłów $v=5$. Jedynki oznaczają admitancje danej kolumny.

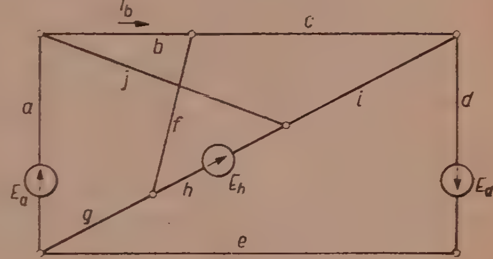
$$I_e = \frac{E_a \cdot abde(f+g)}{W}$$

(na podstawie wiersza I $\oplus$ II).

2) Obliczyć rozpływ prądów w sieci pokazanej na rys. 12. (a, b, . . , j oznaczają admitancje gałęzi).



Rys. 11.



Rys. 12.

Układamy następującą pełną tablicę admitancyjnych sum oczkowych

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
I	1						1	1		1
II	1	1				1	1			
III		1	1						1	1
IV				1	1		1	1	1	
I $\oplus$ II		1				1		1		1
I $\oplus$ III	1	1	1				1	1	1	
I $\oplus$ IV	1			1	1				1	1
II $\oplus$ III	1		1			1	1		1	1
II $\oplus$ IV	1	1		1	1	1		1	1	
III $\oplus$ IV		1	1	1	1		1	1		1
I $\oplus$ II $\oplus$ III			1			1		1	1	
I $\oplus$ II $\oplus$ IV		1		1	1	1	1		1	1
I $\oplus$ III $\oplus$ IV	1	1	1	1	1					
II $\oplus$ III $\oplus$ IV	1		1	1	1	1		1		1
I $\oplus$ II $\oplus$ III $\oplus$ IV			1	1	1	1	1			

W tej pełnej tablicy nie ma wierszy (sum oczkowych) posiadających więcej jak $v=7$ elementów. *Mając ułożoną pełną tablicę admitancyjnych sum oczkowych można określić dowolne prądy w dowolnych gałęziach*

przy dowolnie rozłożonych źródłach zasilania. Pełna tablica admitancyjnych sum oczkowych nie jest zależna od liczby i rozmieszczenia źródeł zasilania.

Dla przykładu ułożymy na podstawie powyższej tablicy wzór na prąd I_b w gałęzi b.

$$I_b = \frac{1}{W}\Big\{E_a ab[fg(c+d+i)\circ(i+j+h)\circ(e+d)+cghi(e+d)+defhi+$$
$$+cde(g+h+f)\circ(i+j+h)]+E_h bh[fj(c+d+i)\circ(d+e)\circ(a+g+e)-$$
$$-acgi(d+e)+adefi+cdegj]+E_d bd[aefhi+ceghj-efgij+$$
$$+ace(g+h+f)\circ(i+j+h)]\Big\}$$

Podobnie postępujemy przy obliczaniu innych prądów, posługując się tą samą tablicą admitancyjnych sum oczkowych.

3. ZASADA DZIAŁANIA PRZYRZĄDÓW SŁUŻĄCYCH DO OBLICZEŃ PARAMETRÓW SIECI

W rozdziale drugim podaliśmy pojęcie grafu fizycznego sieci. Graf fizyczny sieci może służyć do zmechanizowania względnie zautomatyzowania obliczeń parametrów sieci.

Obliczanie wielomianów charakterystycznych może być oparte na pojęciu drzewa lub dopełnienia. W pierwszym przypadku np. ideowy schemat urządzenia będzie przedstawiał się jak na rys. 13.

Źródło zasilania E przyłączamy do dowolnego węzła grafu fizycznego sieci. Pozostałe węzły włączamy poprzez mnożnik logiczny M do wskaźnika napięciowego (lub prądowego) W. W najprostszym przypadku funkcję mnożnika logicznego może spełniać człowiek obserwujący działanie wskaźników podłączonych do poszczególnych węzłów grafu. Wyłączając poszczególne grupy gałęzi w sposób podany w rozdziale pierwszym przy opisie metody zero-jedynkowej obliczania wielomianu charakterystycznego uwzględniamy tylko przypadki działania wskaźnika W. Przy obliczaniu wielomianu impedancyjnego uwzględniamy impedancje gałęzi wyłączonych, przy obliczaniu zaś wielomianu admitancyjnego uwzględniamy admitancje gałęzi nie wyłączonych. Wyłączanie grup gałęzi można w łatwy sposób zautomatyzować.

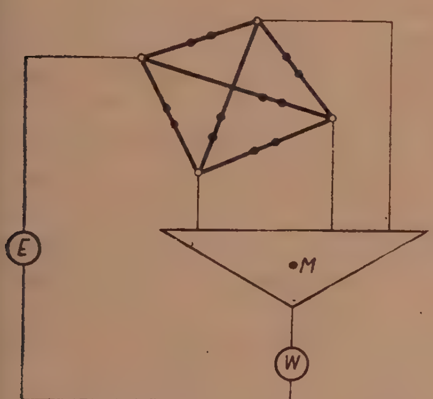
Obliczanie wielomianów charakterystycznych sieci ze zwartymi lub rozwartymi węzłami odbywa się w taki sam sposób po dokonaniu w grafie fizycznym odpowiednich zwarć lub rozwarć węzłów.

Obliczanie napięć lub prądów w sieci za pomocą przyrządu wymaga jego uzupełnienia dodatkowym urządzeniem. Zasada pracy tego urządzenia może być oparta na wzorze (87) lub (69).

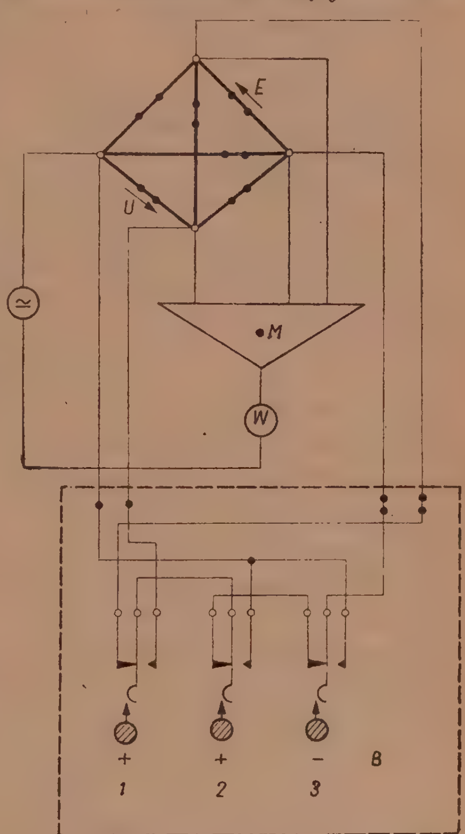
W pierwszym przypadku do interesujących nas węzłów grafu fizycznego sieci należy przyłączyć wskaźniki napięciowe lub prądowe oraz zastępcze źródła zasilania. Wyłączanie grup gałęzi odbywa się indentycznie jak poprzednio. Sposób interpretacji działania wskaźników podany został w rozdziale drugim. Podczas tych operacji należy odłączyć od grafu fizycznego mnożnik logiczny ze wskaźnikiem służącym do obliczania wielomianu charakterystycznego (gdy urządzenie do obliczania wielomianów charakterystycznych oparte jest na pojęciu dopełnienia, nie wymaga ono odłączenia).

Schemat ideowy urządzenia działającego na podstawie wzoru (69) pokazany jest na rys. 14.

Urządzenie to pozwala na równoczesne obliczanie wielomianu charakterystycznego sieci i na-



Rys. 13. Schemat ideowy przyrządu służącego do obliczania wielomianów charakterystycznych sieci: E — źródło zasilania, W — wskaźnik napięcia (lub prądu), M — mnożnik logiczny, - •- •- wyłącznik. Liniami grubymi oznaczono graf fizyczny obliczanej sieci.



Rys. 14. Schemat ideowy przyrządu służącego do obliczania parametrów sieci elektrycznych (linią grubą jest nakreślony graf fizyczny obliczanej sieci).

pięć między węzłami sieci zasilanej przez jedno lub wiele źródeł napięciowych. Uproszczony schemat na rys. 14 dotyczy przypadku obliczania jednego napięcia w sieci zasilanej przez jedno źródło E.

Wyłączanie grup gałęzi odbywa się identycznie jak przy obliczaniu wielomianu charakterystycznego. Każdorazowo w przypadku działania

sygnału W dokonujemy kolejnego przełączania trzech przełączników w zespole B obserwując każdorazowo działanie wskaźnika W. Uwzględnienie odpowiedniego składnika wielomianu charakterystycznego ze znakiem + lub — odbywa się zgodnie z następującą tablicą:

Działanie wskaźnika W (x)			Znak składnika
1	2	3	
x	x	—	+
—	—	x	—

We wszystkich innych przypadkach nie uwzględnia się danej grupy wyłączonych względnie włączonych gałęzi grafu fizycznego sieci.

Te proste czynności przy obliczaniu napięć międzywęzłowych w sieci można w prosty sposób zautomatyzować.

Opisane zasady zautomatyzowania obliczeń parametrów sieci pozwalają również zautomatyzować programowanie obliczeń i analizę sieci w przypadku użycia do tych celów elektronicznych maszyn cyfrowych [16].

4. ZAKOŃCZENIE

Metoda wielomianów charakterystycznych pozwala obliczać również sieci, w których występują sprzężenia oraz elementy nieliniowe. Sprzężenia magnetyczne należy zastąpić układami zastępczymi stosując metodę transfiguracji zupełnej lub niezupełnej [4]. Sprzężenia pojemnościowe należy zastąpić zastępczymi gałęziami.

W przypadku uwzględnienia promieniowania elektromagnetycznego sieci lub jej elementów, należy do schematów sieci wprowadzić równoważne elementy obciążenia.

Jeśli w sieci są elementy nieliniowe lub elementy, których parametry zależą od czynników zewnętrznych (np.: od temperatury, światłości itp.), należy ich impedancje (względnie admitancje) określić w postaci funkcji

$$\dot{k} = f(U_k,\ I_k,\ t_k,\ \ldots)$$

a w obliczeniu sieci metodą wielomianów charakterystycznych uwzględnić obliczenie U_k i I_k, o ile te wielkości występują w powyższych funkcjach.

Gdy w sieci działają elementy czynne, jak lampy, tranzystory itp., należy je zastąpić układami zastępczymi z źródłami napięciowymi sterowanymi prądowo względnie napięciowo.

W dwóch ostatnich przypadkach — po dokonaniu obliczenia sieci — należy dodatkowo rozwiązać układ równań wynikających z wzajemnych zależności funkcyjnych (funkcje nieliniowości i sterowania) obliczonych parametrów sieci.

[16] Konstrukcje tego rodzaju urządzeń zgłosił autor do opatentowania w marcu 1960 r.

Sieci impulsowe można obliczać metodą wielomianów charakterystycznych np. przy pomocy charakterystyk częstotliwościowych.

Zdaniem autora metoda wielomianów charakterystycznych i algebry sieciowej stanowi dogodne narzędzie przy obliczaniu i analizie sieci elektrycznych, gdyż w dużym stopniu upraszcza ona zagadnienia związane z budową strukturalną sieci. Wprowadza ona efektywne uproszczenia w obliczeniach złożonych sieci elektrycznych zarówno płaskich jak i przestrzennych, sprowadzając zagadnienie analizy do prostych operacji. Metoda nie wymaga rozwiązywania układu równań ani stosowania strzałkowania sieci. Szczególne korzyści w stosowaniu tej metody widzi autor w syntezie sieci logicznych. Zagadnienie to jest przedmiotem odrębnej pracy autora.

Autor składa Prof. Drowi Tadeuszowi Cholewickiemu i Prof. Drowi Czesławowi Rajskiemu serdeczne podziękowanie za udzielenie cennych uwag.

Przy opracowaniu niniejszego artykułu dużą pomoc w postaci obszernej konsultacji merytorycznej udzielił autorowi Doc. Dr Stanisław Bellert. Autor wyraża Mu za to gorące podziękowanie.

WYKAZ LITERATURY

1. Cauer W.: *Theorie der linearen Wechselstromschaltungen*. Berlin, 1954.
2. Cholewicki T.: *Macierzowa analiza obwodów elektrycznych*. Warszawa-Wrocław, 1958.
3. Edelman H.: *Allgemeine Grundlagen der Netzberechnung mit Inzidenzmatrizen*. A. für El., 1960, z. 7.
4. Fryze S.: *Ogólna teoria transfiguracji obwodów elektrycznych*. Warszawa, 1934.
5. Ley B. J., Lutz S. G., Rehberg Ch. F.: *Linear circuit analysis*. N. York, Toronto, London, 1959.
6. Okada S., Onodera R., Miyazaki Y., Yamamoto Y.: *Linear geometry and topology of networks*. Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sciences by means of geometry VI, Tokyo, 1955.
7. Okada S., Onodera R., Orui H., Kondo K., Iri M., Mizoo Y., Sunaga T.: *Linear geometry and topology of networks*. RAAG Memoirs of the unifying study of basic problems in engineering and physical sciences by means of geometry V II, Tokyo, 1958.
8. Prihar Z.: *Topological properties of telecomunication networks*. Proc. IRE 7, 1956.
9. Sigorski W. P.: *Mietody analiza elektriczeskich schiem z mnogopolusnymi elementami*. Kiew, 1958.
10. Wong S. Y., Kochen M.: *Automatic network analysis with a digital computation system*. Trans. AIEE, pt. I, vol. 75, 1956.
11. Zielach W.: *Osnowy obszczej tieorii liniejnych elektriczeskich schiem*. 1951.

РАСЧЕТ И АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ МЕТОДОМ СТРУКТУРАЛНЫХ ФУНКЦИЙ

Автор предлагает новый метод расчета и анализа электрических сетей ввода новые понятия:

— сетьевой суммы $\oplus$, ${}_s\Sigma$

— сетьевого произведения $\bigcirc$, ${}_s\Pi$

— структуральной функции W.

Предлагаемый метод основан на топологических свойствах электрических сетей.

Определяется равенство и тождественность элементов, т. е. параметров ветвей сети (импеданса и адмитанса). Равенство элементов (=) обозначает равенство их численных значений (комплексных). Тождественность элементов ($\equiv$) выступает в том случае, если эти элементы равны себе и отвечают одним и тем же ветвям сети. Рассматривается равенство форм вытекающее из их тождественности.

Сетьевая сумма двух элементов k_1 и k_2 определена следующим образом:

$$\text{если } k_1 \not\equiv k_2 \quad \text{то } k_1 \oplus k_2 = k_1 + k_3 \text{ и}$$
$$\text{если } k_1 \equiv k_2 \quad \text{то } k_1 \oplus k_2 = 0.$$

Сетьевой сумме в алгебре Бооля соответствует сумма модуло два. Сетьевая сумма подчинена праву четности.

Сетьевое произведение двух элементов k_1 и k_2 определено следующим образом:

$$\text{если } k_1 \not\equiv k_2 \quad \text{то } k_1 \bigcirc k_2 = k_1 \cdot k_2 \text{ и}$$
$$\text{если } k_1 \equiv k_2 \quad \text{то } k_1 \bigcirc k_2 = 0.$$

Оба упомянутые действия подчинены правам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Слагаемое это произведение элементов всех ветвей дерева или дополнения дерева сети. В первом случае слагаемое называется узловым, во втором случае — петлевым. Кроме того слагаемое может быть адмитансным или импедансным.

Структуральная функция — это сетьевая сумма всех слагаемых сети. В зависимости от вида этих слагаемых структуральная функция может быть узловая или петлевая а также адмитансная или импедансная. Приведенные определения сетьевой суммы и сетьевого произведения применимы также к слагаемым и структуральным функциям с учетом кроме того нормальных алгебраических правил сложения и умножения линейных выражений.

Узловая сумма ${}_s\sum\limits_{\mu}$ это сетьевая сумма элементов ветви узла μ.

Петлевая сумма ${}_s\sum\limits_{m}$ это сетьевая сумма элементов ветви образующих петлю m.

Вводятся основные соотношения:

$$\underline{W} = {}_s\prod_{1}^{v-1} {}_s\sum_{\mu} = {}_s\prod_{1}^{v-1} a_{kk} = A$$

где $\underline{W}$ — узловая структуральная функция (адмитансная)

v — количество узлов сети

a_{kk} — элементы основной диагонали детерминанта узлов (адмитансного) сети

A — значение упомянутого детерминанта

Аналогично:

$$\overline{W} = {}_s\prod_1^n {}_s\sum_m = {}_s\prod_1^n b_{kk} = B$$

где W — петлевая структуральная функция (импедансная)
n — количество независимых петель сети
b_{kk} — элементы основной диагонали детерминанта петель (импедансного) сети
B — значение упомянутого детерминанта.

Импеданс $Z_{\mu\nu}$ или адмитанс $Y_{\mu\nu}$ сети измеряемый между узлами μ и ν выражены соответственно формулами:

$$Z_{\mu\nu} = \frac{W_{\mu\nu}}{W}; \qquad Y_{\mu\nu} = \frac{W}{W_{\mu\nu}}$$

где W — структуральная функция сети (узловая, адмитансная или петлевая импедансная)
$W_{\mu\nu}$ — структуральная функция сети в которой узлы μ и ν короткозамкнуты.

Далее выведен ряд формул и методов расчета напряжений и токов сети. Вспомогательным пособием при этих расчетах являются выведенные понятия физического графа сети и таблица адмитансных петлевых сумм.

Н третьей главе даны принципы действия приборов предназначенных для механизации и автоматизации вычислений параметров сети. Действие этих приборов обосновано на формулах приведенных в статье.

В заключение статьи автор рассматривает способы применения описанного метода к расчету электрических сетей разного рода (с взаимными связями, нелинейными элементами и т. д.).

По мнению автора описанный метод можно применять также при синтезе контактных схем.

COMPUTATION AND ANALYSIS OF ELECTRIC NETWORK BY METHOD OF STRUCTURAL FUNCTIONS

A new method of computation and analysis of electric network suggested by the author introduces the following new terms:

network sum $\oplus$, ${}_s\sum$
network product $\odot$, ${}_s\prod$ and
structural function W.

The method is based upon the topological properties of the electric network.

The equality and identity of the elements i.e. parameters (impedance and admittance) of the network branches are determined.

The equality of elements (=) means equality of their numerical values (complex). The identity of elements ($\equiv$) takes place when they are equal and represent the same network branch. The equality of the forms resulting from their identity are examined.

The network sum of the elements k_1 and k_2 may be defined as follows:

$$\text{if } k_1 \not\equiv k_2 \text{ then } k_2 \oplus k_2 = k_1 + k_2$$
$$\text{if } k_2 \equiv k_2 \text{ then } k_2 \oplus k_2 = 0\,.$$

The network sum corresponds to the s u m m o d u l o two in Boolean algebra. The network sum is subjected to the law of parity checks.

The n e t w o r k p r o d u c t of two elements k_1 and k_2 may be defined as follows:

$$\text{If } k_1 \neq k_2 \text{ then } k_1 \bigcirc k_2 = k_1 \cdot k_2 \text{ and}$$
$$\text{If } k_1 = k_2 \text{ then } k_1 \bigcirc k_2 = 0 .$$

Both above operations (network sum and product) are subjected to the laws of association, commutation and distribution.

The c o m p o n e n t denotes the product of elements of all branches of tree or cotree, and is called node component or loop component respectively. Moreover there may be admittance or impedance component.

The s t r u c t u r a l f u n c t i o n means a network sum of all network components. Depending on the kind of these components the structural function may be either node or loop and admittance or impedance. The suggested definitions of the network sum and the network product may be extended also to the components and the structural functions observing besides of it the same rules of summation and multiplication of the linear forms as in algebra.

The n o d e s u m ${}_s\sum\limits_{\mu}$ means the network sum of elements of the node branches μ.

The l o o p s u m ${}_s\sum\limits_{m}$ denotes the network sum of elements of the loop branches m.

The foundamental dependence is given

$$\underline{W} = {}_s\prod_{1}^{v-1} {}_s\sum_{\mu} = {}_s\prod_{1}^{v-1} \cdot a_{kk} = A .$$

where

$\underline{W}$ = node structural function (admittance),

v = number of network nodes,

a_{kk} = elements of main diagonal of node network determinant (admittance),

A = value of determinant.

Similarly

$$\overline{W} = {}_s\prod_{1}^{n} \sum_{m} = {}_s\prod_{1}^{n} \cdot b_{kk} = B ,$$

where

$\overline{W}$ = loop structural function (impedance),

n = number of independent network loops,

b_{kk} = elements of main diagonal of loop network determinant (impedance),

B = value of determinant.

The network impedance $Z_{\mu\nu}$ or network admittance $Y_{\mu\nu}$ if measured between the nodes μ and ν may be expressed by the formulae

$$Z_{\mu\nu} = \frac{W_{\mu\nu}}{W} ; \qquad Y_{\mu\nu} = \frac{W}{W_{\mu\nu}} ,$$

where

W = network structural function (node admittance structural function or loop impedance, structural function),

$W_{\mu\nu}$ = network structural function when the nodes μ and ν are short-circuited.

A number of formulae and methods for computation of the network voltages and currents are then given. The suggested concept of the network physical graph and the table of the admittance loop sums are extremely helpful in computation work.

The operation principles of the computors serving for the mechanization and automation of the calculation work of the network parameters are described in chapter III.

The formulae upon which the functionning of these computors is based are given.

In closing part of the paper the author discusses the ways of application of the method conceived for computation of all kinds of electric network (with linkages, non-linear elements etc.). In authors opinion the described method may be applied to the synthesis of switching circuits as well.

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM X ZESZYT 1 1961

621.392.1.

J. KUDREWICZ

Badanie stabilności nieliniowych układów elektrycznych metodami analizy funkcjonalnej

Rękopis dostarczono 11. 3. 1960

W artykule podano metodę badania stabilności układu złożonego z czwórnika liniowego połączonego łańcuchowo z czwórnikiem nieliniowym, pracujących razem w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego. Przebiegi elektryczne $x(t)$ w takim układzie opiszą się nieliniowym równaniem całkowym typu Volterry:

$$x(t)=\lambda \int_{0}^{t} k\,(t-\tau)\, f\,[x(\tau)]\, d\tau+w(t)$$

Rozpatrzono zależność stabilności od współczynnika wzmocnienia wzmacniacza λ, oraz od warunków początkowych, lub przypadkowych zakłóceń $w(t)$ w układzie. Wykazane zostało, przy pewnych dość ogólnych założeniach, że ze stabilności układu linearyzowanego wynika stabilność (w sensie Lapunowa) układu nieliniowego. Oprócz stabilności w sensie Lapunowa badana jest również stabilność asymptotyczna. Podano metodę pozwalającą w przypadku wzbudzenia się układu oszacować amplitudę drgań dla różnych wartości współczynnika wzmocnienia.

Metoda badania stabilności oparta jest na pojęciach i twierdzeniach analizy funkcjonalnej, a w szczególności na pojęciu operatora w przestrzeni Banacha.

1. WSTĘP

Metody analizy funkcjonalnej stosowane już są od dawna do badania nieliniowych układów mechanicznych. W szczególności rozwiązanie zagadnienia o tzw. punktach bifurkacji [1] pozwoliło na sformułowanie warunków, przy których prawdziwa jest stosowana od dawna metoda linearyzacji układu nieliniowego. Typowym zagadnieniem rozwiązanym powyższymi metodami jest określenie warunków wyboczenia (prętów) [1]. Bezpośrednie przeniesienie wspomnianych metod do badania układów elektrycznych napotyka jednak na znaczne trudności. W zagadnieniach stabilności układów interesuje nas zmiana napięcia (prądu) elektrycznego w czasie t i to dla $t\in(0,\infty)$. W tych warunkach układy elektryczne opisują się zazwyczaj operatorami, które nie są zwarte (pełnociągłe), a prze-

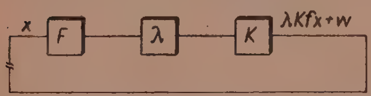
strzenie funkcyjne są na ogół nieośrodkowe. Wobec tego rozbudowany dotychczas przez matematykę dział nieliniowych równań całkowych [1], [5] da się tu zastosować jedynie w bardzo wąskim zakresie.

Pierwsza praca na temat zastosowania twierdzenia o punktach bifurkacji w problemach układów elektrycznych ukazała się w 1958 r. [2]. Autor jej doc. R. Kulikowski sugerował mi zajęcie się tym problemem i zastosowaniem metod podanych przez Krasnosielskiego [1] do badania stabilności układów elektrycznych.

Podane w pracy twierdzenia o stabilności opierają się na zasadzie odwzorowań przybliżających Banacha, a idea dowodów twierdzeń 1 i 3 jest zaczerpnięta z książki Krasnosielskiego [1]. Dokładne omówienie pojęcia przestrzeni ilorazowych, jak również cytowane tw. o rezolwencie i widmie operatora w przestrzeni Banacha znaleźć można w każdym podręczniku analizy funkcjonalnej np. [3].

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Rozpatrzmy układ elektryczny złożony z łańcuchowego połączenia czwórnika nieliniowego — parametrycznego F, idealnego wzmacniacza o wzmocnieniu λ i czwórnika liniowego — parametrycznego K.



Rys. 1. Blokowy schemat układu ze sprzężeniem zwrotnym opisującego się równaniem (11).

O czwórniku nieliniowym — parametrycznym F zakładać będziemy, że opisuje się równaniem

$$y(t)=f(x(t), t) \tag{1}$$

gdzie $x(t)$ i $y(t)$ są przebiegami elektrycznymi odpowiednio na wejściu i wyjściu czwórnika F, a funkcja $f(u, t)$ jest ograniczona i ciągła dla $0 \leqslant t < \infty$ i $|u| < R$, gdzie R jest pewną ustaloną liczbą. Załóżmy ponadto, że $f(0, t) \equiv 0$ co fizycznie oznacza że czwórnik F nie jest zdolny do magazynowania energii. Od funkcji $f(u, t)$ żądać będziemy jeszcze, aby w pewnym przedziale $[-\varrho, \varrho]$ (gdzie $\varrho \leqslant R$) spełniała warunek Lipschitza, to znaczy aby dla dowolnego u_1, u_2 takich, że $|u_1|, |u_2| < \varrho$ i dla $0 \leqslant t \leqslant \infty$ spełniona była nierówność

$$|f(u_1, t)-f(u_2, t)| \leqslant q(\varrho)|u_1-u_2| \tag{2}$$

gdzie $q(\varrho)$ jest stałą zależną wyłącznie od ϱ.

Przez idealny wzmacniacz rozumieć będziemy czwórnik, dla którego przebieg wyjściowy $y(t)$ jest związany z wejściowym $x(t)$ równaniem

$$y(t)=\lambda x(t) \tag{3}$$

gdzie λ jest liczbą stałą.

Czwórnik liniowy K niech będzie układem zbudowanym z elementów o stałych skupionych $R\,L\,C$ na ogół zależnych od czasu. Układ taki opisuje się równaniem różniczkowym

$$\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu(t) \frac{d^\nu y(t)}{dt^\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu(t) \frac{d^\nu x(t)}{dt^\nu} \tag{4}$$

(gdzie $m \geqslant n$) z pewnymi warunkami początkowymi $y^{(\nu)}(0)=y_\nu$, $\nu=0,1\ldots m-1$, lub równoważnym mu równaniem

$$y(t)=\frac{b_m(t)}{a_m(t)}\,x(t)+\int_0^t k\,(t\,,\tau)\,x(\tau)\,d\tau+w(t)$$

gdzie $k\,(t\,,\tau)$ jest funkcją Greena dla operatora różniczkowego $A_m\,(p\,,t)=$ $=\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu(t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}$ natomiast $w(t)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego $A_m(p\,,t)\,w(t)=0$ przy warunkach początkowych $w^{(\nu)}(0)=y_\nu$, $\nu=0,1\ldots m-1$. Funkcja $w(t)$ zależy w sposób ciągły od współczynników y_ν i znika w przypadku zerowych warunków początkowych.

Ograniczymy się jedynie do tej klasy układów dla których $m>n$ (to znaczy $b_m(t)\equiv 0$) i dla których funkcja $k\,(t\,,\tau)$ spełnia tzw. warunek stabilności, w tym sensie, że każde ograniczone wymuszenie $x(t)$ wywołuje ograniczoną odpowiedź układu. Jak wynika z nierówności

$$\sup_{0\leqslant t<\infty}\left|\int_0^t k\,(t\,,\tau)\,x(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \sup_{0\leqslant t<\infty}\int_0^t \left|k\,(t\,,\tau)\right|\left|x(\tau)\right|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t<\infty}\int_0^t \left|k\,(t\,,\tau)\right|d\tau \cdot \sup_{0\leqslant t<\infty}\left|x(\tau)\right|$$

warunkiem wystarczającym stabilności układu jest

$$\sup_{0\leqslant t<\infty}\int_0^t \left|k\,(t\,,\tau)\right|d\tau<\infty\,. \tag{5}$$

W szczególnym przypadku gdy stałe $R\,L\,C$ są niezależne od czasu to $k\,(t,\tau)=k\,(t-\tau)$ i warunek (5) sprowadzi się do:

$$\int_0^\infty \left|k(\tau)\right|d\tau<\infty \tag{6}$$

gdzie $k\,(t)$ jest charakterystyką impulsową układu.

Łańcuchowe połączenie czwórników F, λ, K opisze się więc równaniem

$$y(t)=\lambda\int_0^t k(t,\tau)f(x(\tau),\tau)\,d\tau+w(t)$$

lub krótko

$$y=\lambda K\mathbf{f}x+w \tag{7}$$

gdzie K i $\mathbf{f}$ są teraz symbolami operatorów $Kx=\int_0^t k(t,\tau)x(\tau)\,d\tau$ natomiast $\mathbf{f}x=f(x(t),t)$.

Funkcje x,y,w mogą być traktowane jako elementy przestrzeni Banacha $C_{[0,\infty)}$ to znaczy przestrzeni liniowej funkcji ciągłych i ograniczonych dla $0\leqslant t<\infty$ w której wprowadzono normę

$$\|x\|\overset{df}{=}\sup_{0\leqslant t<\infty}|x(t)| \tag{8}$$

Można wykazać, że jest to przestrzeń zupełna.

Operator K jest wtedy liniowym operatorem działającym w tej przestrzeni (to znaczy określonym na każdym elemencie $x\in C_{[0,\infty)}$ i o wartościach $Kx\in C_{[0,\infty)}$), a norma operatora oszacowana jest przez nierówność

$$\|K\|\overset{df}{=}\sup_{\|x\|=1}\|Kx\|\leqslant\sup_{0\leqslant t<\infty}\int_0^t|k(t,\tau)|\,d\tau. \tag{9}$$

Operator $\mathbf{f}$ jest nieliniowym operatorem określonym w kuli $\|x\|\leqslant R$ i jak wynika z nierówności (2) spełniającym ponadto w kuli $\|x\|\leqslant\varrho$ warunek Lipschitza ze stałą $q(\varrho)$ to znaczy że dla każdego x_1 i x_2 takich, że $\|x_1\|,\|x_2\|\leqslant\varrho$ spełniona jest nierówność

$$\|\mathbf{f}x_1-\mathbf{f}x_2\|\leqslant q(\varrho)\|x_1-x_2\|. \tag{10}$$

Przebiegi elektryczne w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego wyrażają się równaniem

$$x=\lambda K\mathbf{f}x+w \tag{11}$$

a badanie stabilności układu sprowadzi się do badania istnienia rozwiązań równania (11) i jego zależności od warunków początkowych, które określają funkcję $w(t)$

P r z y k ł a d: Rozpatrzmy układ generatora składającego się z obwodu szeregowego RLC połączonego z oporem ujemnym typu łukowego. Zależność pomiędzy prądem i napięciem dla obwodu rezonansowego opisze się równaniem:

$$u(t)=L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau+\frac{Q_0}{C},\qquad i(0)=0$$

lub równoważnym mu:

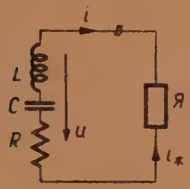
$$i(t)=\int_0^t k(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau+w(t)$$

gdzie

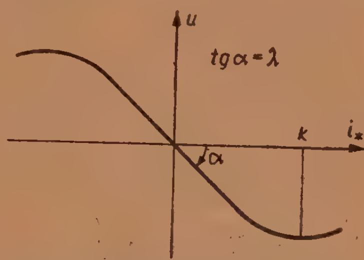
$$k(t)=\frac{e^{-at}}{\omega L}\left[\omega\cos\omega t-a\sin\omega t\right],\qquad w(t)=-Q\cdot\frac{\omega_0^2}{\omega}e^{-at}\sin\omega t$$

$$a=\frac{R}{2L},\qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\qquad \omega=\sqrt{\omega_0^2-a^2}\,.$$

O oporze ujemnym załóżmy że ma charakterystykę $u=\lambda\left(i_*-\frac{i_*^3}{3k^2}\right)$ (rys. 3)



Rys. 2. Układ generatora z oporem ujemnym typu łukowego.



Rys. 3. Charakterystyka oporu ujemnego typu łukowego.

gdzie λ i k są ustalonymi liczbami dodatnimi. Dla zamkniętego obwodu zachodzi równanie $i=-i_*$ a stąd:

$$i(t)=\lambda\int_0^t k(t-\tau)\left[i(\tau)-\frac{i^3(\tau)}{3k^2}\right]d\tau+w(t) \qquad (*)$$

Łatwo sprawdzić, że równanie (*) jest równoważne równaniu różniczkowemu

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+\left(R-\lambda+\frac{\lambda}{k^2}i^2\right)\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0\,;\qquad i(0)=0\qquad i'(0)=-Q_0\omega_0^2$$

które daje się sprowadzić do równania Van der Pola.

Równanie (*) jest typu równania (11) gdzie operator $fi=i-\frac{i^3}{3k^2}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $q=1$ w kuli $\|i\|<k\sqrt{2}$ natomiast operator K jest operatorem liniowym z normą którą można „grubo" oszacować przez nierówność:

$$\|K\|<\frac{\sqrt{\omega^2+a^2}}{\omega L}\int_0^\infty e^{-at}dt=2\frac{\omega_0}{\omega}\,\frac{I}{R}$$

3. STABILNOŚĆ UKŁADU NIELINIOWEGO — PARAMETRYCZNEGO

Układ elektryczny nazywać będziemy stabilnym w sensie Lapunowa [4] jeżeli małym warunkom początkowym odpowiadają małe drgania $x(t)$ lub dokładniej mówiąc, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje takie $\delta(\varepsilon)$, że z nierówności $\|w\|<\delta$ wynika $\|x\|<\varepsilon$.

T w i e r d z e n i e 1. *Jeżeli istnieje kula o promieniu* $\varrho > 0$ * *w której zachodzi nierówność*:

$$|\lambda| \, \|K\| \, q < 1. \tag{12}$$

to układ jest stabilny w sensie Lapunowa.

D o w ó d: Określimy najpierw warunki, dla których równanie (11) ma jedyne rozwiązanie, będące granicą ciągu kolejnych przybliżeń. Z jednorodności operatora f i z warunku Lipschitza wynika, że $\|\mathrm{f}x\| \leqslant q \|x\|$ dla $\|x\| \leqslant \varrho$ co pozwala w następujący sposób oszacować wartość operatora $Ax \overset{df}{=} \lambda K \mathrm{f} x + w$ w kuli $\|x\| < \varrho$:

$$\|Ax\| \leqslant |\lambda| \, \|K\| \, q \, \|x\| + \|w\| \leqslant |\lambda| \, \|K\| \, q\varrho + \|w\|$$

a więc dla

$$\|w\| \leqslant (1 - |\lambda| \, \|K\| \, q) \, \varrho \tag{13}$$

zachodzi nierówność $\|Ax\| < \varrho$.

Ponadto operator A spełnia warunek Lipschitza ze stałą $|\lambda| \, \|K\| \, q$

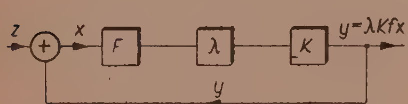
$$\|Ax_1 - Ax_2\| = |\lambda| \, \|K\mathrm{f}x_1 - K\mathrm{f}x_2\| \leqslant |\lambda| \, \|K\| \, \|\mathrm{f}x_1 - \mathrm{f}x_2\| \leqslant \|\lambda\| \, K \, \| \, q \, \|x_1 - x_2\|.$$

Jeżeli więc zachodzi warunek (12) i (13) to spełnione są wszystkie założenia twierdzenia Banacha o odwzorowaniach przybliżających [3] i równanie $x = Ax$ posiada w kuli $\|x\| \leqslant \varrho$ jedyne rozwiązanie, którego normę szacuje nierówność

$$\|x\| \leqslant \frac{\|w\|}{1 - |\lambda| \, \|K\| \, q}. \tag{14}$$

Stąd wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $\|x\| < \varepsilon$ jeżeli tylko $\|w\| < (1 - |\lambda| \, \|K\| \, q) \min(\varepsilon, \varrho)$ i w szczególności dla $w(t) = 0$ mamy $x(t) = 0$ c. n. d.

W układzie stabilnym interesować nas mogą przebiegi w pętli sprzężenia zwrotnego w przypadku gdy układ z zerowymi warunkami początkowymi jest pobudzony pewnym przebiegiem $z(t)$ przyłożonym z zewnątrz do układu (rys. 4). Układ opisze się wówczas równaniem (identycznym z równaniem (11)):



Rys. 4. Blokowy schemat układu opisującego się równaniem (15).

$$x = \lambda K \mathrm{f} x + z. \tag{15}$$

W przypadku gdy zachodzi nierówność

$$\|z\| \leqslant (1 - |\lambda| \, \|K\| \, q) \, \varrho$$

to rozwiązanie równania (15) można otrzymać metodą kolejnych przybliżeń wybierając jako zerowe przybliżenie dowolną funkcję z kuli

---

* to znaczy zbiór elementów $x \in C_{(0,\infty)}$ takich, że $\|x\| \leqslant \varrho$.

o promieniu ϱ. Ciąg kolejnych przybliżeń $\{x_n\}$ (taki; że $\|x_0\|<\varrho$ i $x_n = \lambda K\mathrm{f}x_{n-1}+z$) jest zbieżny do rozwiązania $x=(I-\lambda K\mathrm{f})^{-1}z$ równania (15) z szybkością określoną przez nierówność:

$$\|x-x_n\| \leqslant \frac{(|\lambda|\,\|K\|\,q)^n}{1-|\lambda|\,\|K\|\,q}\|z\|. \tag{16}$$

Można również wykazać [1], że operator $N^\lambda=(I-\lambda K\mathrm{f})^{-1}$ spełnia następujące dwie nierówności:

$$\frac{\|z_1-z_2\|}{1+|\lambda|\,\|K\|\,q} \leqslant \|N_\lambda z_1 - N_\lambda z_2\| \leqslant \frac{\|z_1-z_2\|}{1-|\lambda|\,\|K\|\,q} \tag{17}$$

dla $\|z_1\|, \|z_2\| \leqslant (1-|\lambda|\,\|K\|\,q)\,\varrho$

$$\|N_{\lambda_1}z - N_{\lambda_2}z\| \leqslant \frac{\|K\|\,q\,\|z\|\,|\lambda_1-\lambda_2|}{(1-|\lambda_1|\,\|K\|\,q)(1-|\lambda_2|\,\|K\|\,q)} \tag{18}$$

dla $\|z\| \leqslant [1-\|K\|\,q\max(\lambda_1,\lambda_2)]\,\varrho$

a więc jest operatorem, ciągłym i ograniczonym, a również zależnym w sposób ciągły od parametru λ.

Dla stosunkowo szerokiej klasy układów operator f spełnia warunek Lipschitza ze stałą q w całej przestrzeni ($\varrho=\infty$). Wtedy nierówność (12) gwarantuje istnienie rozwiązania równania (15) dla dowolnych z.

4. STABILNOŚĆ UKŁADÓW NIELINIOWYCH

Rozpatrzmy bliżej przypadek, w którym zarówno czwórnik nieliniowy jak i liniowy jest zbudowany z elementów o parametrach nie zmieniających się w czasie.

Operator K określony jest wtedy przez splot zmiennej $x(t)$ z odpowiedzią impulsową układu:

$$Kx=\int_0^t k(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

Transformata Laplacea funkcji $k(t)$ jest funkcją wymierną o stopniu licznika mniejszym od stopnia mianownika:

$$\mathcal{L}[K(t)]=\frac{L(s)}{M(s)}. \tag{20}$$

Dla dalszych zastosowań konieczne jest podanie następującego lematu:

L e m a t 1. *Operator K jest ograniczony w przestrzeni $C_{[0,\infty]}$ wtedy i tylko wtedy gdy $M(s)$ nie znika w żadnym punkcie półpłaszczyzny* $\mathrm{Re}\,s \geqslant 0$.

D o w ó d: Ponieważ $L(s)$ i $M(s)$ są wielomianami i $st\,L < st\,M$ to odpowiedź impulsowa układu ma postać:

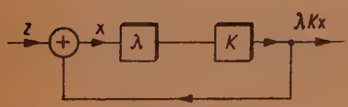
$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{L(s)}{M(s)}\right] = \sum_{\nu=1}^{stM} A_\nu t^{n_\nu} e^{-\alpha_\nu t} \cos(w_\nu t + \varphi_\nu)$$

gdzie $s_\nu = -\alpha_\nu \pm i w_\nu$ jest miejscem zerowym wielomianu $M(s)$. Łatwo zauważyć, że norma operatora: K: $\|K\| \leq \int\limits_0^\infty |k(t)|\,dt$ jest ograniczona w przypadku gdy wszystkie $\alpha_\nu > 0$.

Wystarczy teraz wykazać, że gdy przynajmniej jedno $\alpha_\nu \geqslant 0$ to istnieje takie $x(t)$, że Kx nie należy do $C_{[0,\infty]}$. Istotnie jeżeli $\alpha_\nu > 0$ to wystarczy wziąć np. $x(t)=1$, jeżeli natomiast $\alpha_\nu = 0$ i $M(iw_\nu)=0$ to operator K jest nieograniczony w punkcie $x(t) = \sin w_\nu t$ (lub $x(t) = \cos w_\nu t$).

Rozpatrzmy teraz w przestrzeni $C_{[0,\infty]}$ równanie

$$x = \lambda Kx + z \tag{21}$$



Rys. 5. Blokowy schemat układu opisującego się równaniem (21).

(opisujące układ z rys. 5), gdzie K jest operatorem ograniczonym. Jeżeli dokonamy transformacji Laplace'a na obu stronach równania (21) to otrzymamy

$$x(s) = \lambda \frac{L(s)}{M(s)} x(s) + z(s)$$

a stąd

$$x(s) = z(s) \frac{1}{1 - \lambda \dfrac{L(s)}{M(s)}} = z(s) - \lambda \frac{L(s)}{\lambda L(s) - M(s)} z(s). \tag{22}$$

Po wykonaniu przekształcenia odwrotnego otrzymamy

$$x(t) = z(t) - \lambda \int\limits_0^t R_\lambda(t-\tau) z(\tau)\,d\tau \quad \text{gdzie} \quad R_\lambda(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{L(s)}{\lambda L(s) - M(s)}\right]. \tag{23}$$

Opierając się na lemacie 1, można ustalić następujące twierdzenie:

T w i e r d z e n i e 2. *Operator K posiada w przestrzeni $C_{[0,\infty]}$ rezolwentę* wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda L(s) - M(s)$ nie znika w żadnym punkcie półpłaszczyzny* $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$.

Rozwiązanie równania (21) określone wzorem (23) można teraz przepisać w postaci:

* Rezolwentą N_λ operatora K nazywamy operator rozwiązujący równanie (21) dla każdego $z \in C_{[0,\infty]}: x = N_\lambda z$ jeżeli $x = \lambda Kx + z$. Parametr λ, dla którego istnieje rezolwenta N_λ nazywamy wartością regularną operatora K. Zbiór liczb λ nie będących wartościami regularnymi, nazywamy widmem operatora K.

$$x = (I - \lambda K)^{-1} z \equiv (I - \lambda R_\lambda) z \tag{24}$$

gdzie operator R_λ jest wyznaczony przez jądro różnicowe $R_\lambda(t-\tau)$.

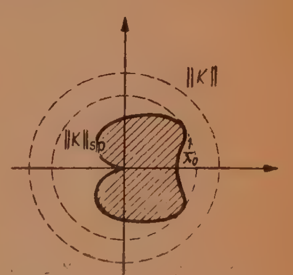
Zbiór wartości λ dla których $\lambda L(s) - M(s) \neq 0$ dla $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ jest zatem zbiorem rezolwenty (albo zbiorem wartości regularnych) operatora K, λ nie należące do zbioru rezolwenty zaliczamy do widma operatora K.

Jak wynika z twierdzeń o widmie operatora liniowego w przestrzeni Banacha [3], zbiór wszystkich wartości λ należących do widma operatora K spełnia nierówność:

$$\left|\frac{1}{\lambda}\right| \leqslant \|K\|_{sp} = \lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{\frac{1}{n}} \tag{25}$$

gdzie liczba $\|K\|_{sp}$ jest tzw. promieniem spektralnym operatora K. Łatwo zauważyć, że zachodzi nierówność $(\|K\|_{sp} \leqslant \|K\|)$.

Można jednak znacznie dokładniej określić zbiór wartości λ należących do widma operatora K. W tym celu zauważmy, że wielomian $\lambda L(s) - M(s)$ jest funkcją ciągłą parametru λ a więc zbiór λ dla których $\lambda L(iw) - M(iw) = 0$ dla $-\infty \leqslant w \leqslant +\infty$ jest zbiorem brzegowym widma operatora K. Wykreślmy w układzie biegunowym (na powierzchni Riemanna dla funkcji $\frac{L(s)}{M(s)}$) funkcję $K(iw) = \frac{L(iw)}{M(iw)}$. Otrzymamy pętlę Niquista, linię ciągłą zamkniętą [ponieważ $K(i\infty) = K(-i\infty) = 0$] rozgraniczającą powierzchnię Riemanna na dwie części, z których jedna (nie zawierająca punktu $s=\infty$) jest odwzorowaniem przez funkcję $\frac{L(s)}{M(s)}$ prawej półpłaszczyzny zmiennej zespolonej, natomiast druga — lewej półpłaszczyzny. Jeżeli teraz liczba $\frac{1}{\lambda}$ leży w obrazie prawej półpłaszczyzny zmiennej zespolonej (obszar zakreskowany na rys. 5) to $\lambda L(s) - M(s)$ ma zero w prawej półpłaszczyźnie zmiennej s i λ należy do widma operatora K, w przeciwnym przypadku do zbioru rezolwenty.



Rys. 6. Przykładowy wykres pętli Niquista i obszaru objętego przez widmo operatora K.

Fizyczne znaczenie mają dla nas jedynie wartości rzeczywiste λ.

Podsumowując powyższe rozważania można powiedzieć, że układ liniowy w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy λ jest wartością regularną operatora K.

Rozpatrzmy teraz warunki stabilności układu nieliniowego z rys. 1, gdzie o operatorze f założymy, że da się przedstawić w postaci

$$\mathrm{f}x = f[x(t)] = ax(t) + w[x(t)] \tag{26}$$

gdzie a jest liczbą różną od zera, natomiast $w(x)$ jest funkcją spełniającą w przedziale $[-\varrho, +\varrho]$ warunek Lipschitza

$$|w(x_1)-w(x_2)| \leqslant \delta(\varrho)|x_1-x_2| \quad \text{dla} \quad |x_1|, |x_2| \leqslant \varrho \tag{27}$$

przy czym ponadto $\delta(\varrho) \to 0$ przy $\varrho \to 0$.

Bez zmniejszenia ogólności dalszych rozważań można przyjąć $a=1$ i wtedy część liniowa operatora $\mathbf{f}$ (tzw. różniczka Frecheta [1]) staje się operatorem tożsamościowym, natomiast część nieliniowa $\mathbf{w}x = w[x(t)]$ spełnia w kuli $\|x\| < \varrho$ warunek Lipschitza $\|\mathbf{w}x_1 - \mathbf{w}x_2\| \leqslant \delta(\varrho)\|x_1 - x_2\|$ przy czem $\delta(\varrho) \to 0$ przy $\varrho \to 0$.

Równanie (11) opisujące przebiegi elektryczne w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego można teraz przepisać w postaci:

$$x = \lambda K x + \lambda K \mathbf{w} x + w. \tag{28}$$

Dla λ będących wartościami regularnymi operatora K mamy wobec (24)

$$x = (I - \lambda R_\lambda)(\lambda K \mathbf{w} x + w)$$

a stąd, ponieważ: $(I-\lambda R_\lambda)(I-\lambda K) = I$, więc $(I-\lambda R_\lambda)\lambda K = -\lambda R_\lambda$ i ostatecznie równanie (28) staje się równoważne równaniu

$$x = -\lambda R_\lambda \mathbf{w} x + (I - \lambda R_\lambda) w. \tag{29}$$

Opierając się na zasadzie odwzorowań przybliżających Banacha zbadamy istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania (29). Rozumując analogicznie jak w dowodzie tw. 1 dojdziemy do wniosku, że jeżeli

$$|\lambda| \|R_\lambda\| \delta(\varrho) < 1 \tag{30}$$

i ponadto:

$$\|(I-\lambda R_\lambda) w\| \leqslant [1 - |\lambda| \|R_\lambda\| \delta(\varrho)] \varrho \tag{31}$$

to równanie (29), a w konsekwencji równanie (28) posiada jedyne rozwiązanie w kuli $\|x\| \leqslant \varrho$ zależne w sposób ciągły od warunków początkowych w przy czym

$$\|x\| \leqslant \frac{\|(I-\lambda R_\lambda) w\|}{1 - |\lambda| \|R_\lambda\| \delta(\varrho)} \leqslant \frac{\|I - \lambda R_\lambda\|}{1 - |\lambda| \|R_\lambda\| \delta(\varrho)} \|w\|. \tag{32}$$

Równanie $x_0 = \lambda K x_0 + w$ nazwijmy równaniem układu „linearyzowanego". Wyrażenie $x_0 = (I - \lambda R_\lambda) w$ będzie jego rozwiązaniem. Z równania (29) wynika nierówność

$$\|x - (I - \lambda R_\lambda) w\| \leqslant |\lambda| \|R_\lambda\| \delta(\varrho) \|x\| \tag{33}$$

mówiąca, że rozwiązanie równania nieliniowego (28) mało różni się od rozwiązania równania linearyzowanego.

Powyższe rozważania pozwalają ustalić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. *Jeżeli układ linearyzowany jest stabilny to układ nieliniowy jest również stabilny w sensie Lapunowa.*

Dowód: Istotnie jeżeli $\|R_\lambda\| < \infty$ to dla dostatecznie małych $\varrho > 0$ zachodzi nierówność $|\lambda|\,\|R_\lambda\|\,\delta(\varrho) < 1$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy $\|x\| < \varepsilon$ jeżeli tylko $\|w\| < \frac{1 - |\lambda|\,\|R_\lambda\|\,\delta(\varrho)}{\|I - \lambda R_\lambda\|} \min(\varepsilon, \varrho)$.

Warto wspomnieć, że w przypadku $a = 0$ $(\mathbf{f} = \mathbf{w})$ równanie $x = \lambda K \mathbf{f} x + w$ ma postać równania (29) i nierówności (30) i (31) są zastąpione odpowiednio przez $|\lambda|\,\|K\|\,\delta(\varrho) < 1$ i $\|w\| \leqslant [1 - |\lambda|\,\|K\|\,\delta(\varrho)]\varrho$. Układ nieliniowy jest wtedy stabilny w sensie Lapunowa dla wszystkich λ.

Przebiegi elektryczne $x(t)$ w pętli sprzężenia zwrotnego układu stabilnego pobudzonego przyłożonym z zewnątrz przebiegiem $z(t)$ (rys. 4), (w szczególności $z(t) = w(t)$) są wyznaczone jednoznacznie, jeżeli tylko

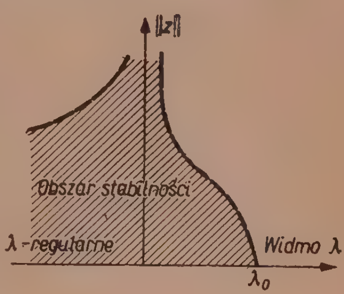
$$\|z\| \leqslant \frac{1 - |\lambda|\,\|R_\lambda\|\,\delta(\varrho)}{\|I - \lambda R_\lambda\|}\varrho \quad \text{i} \quad |\lambda|\,\|R_\lambda\|\,\delta(\varrho) < 1. \tag{34}$$

Przy pobudzeniu układu dużymi sygnałami, nie spełniającymi warunku (34) układ może się wzbudzić.

Wykreślmy w układzie współrzędnych $\|z\|$, λ (λ-rzeczywiste) funkcję

$$\|z\| = \chi(\lambda) \overset{df}{=} \sup_{\varrho} \frac{1 - |\lambda|\,\|R_\lambda\|\,\delta(\varrho)}{\|I - \lambda R_\lambda\|}\varrho \text{ pod warunkiem } |\lambda|\,\|R_\lambda\|\,\delta(\varrho) < 1. \tag{35}$$

Otrzymamy linię rozgraniczającą „obszar stabilności" od obszaru w którym układ może się wzbudzić (rys. 7). Jeżeli punkt o współrzędnych $(\lambda, \|z\|)$ leży w „obszarze stabilności", to równanie $x = \lambda K \mathbf{f} x + z$ ma jedyne rozwiązanie zależne w sposób ciągły od z.



Rys. 7. Przykładowy wykres obszarów stabilności układu nieliniowego.

Twierdzenie 3 można uogólnić na znacznie szerszą klasę układów elektrycznych. Niech nieliniowy (parametryczny) układ elektryczny opisuje się równaniem: $x = \lambda A x + w$ gdzie x i w są elementami przestrzeni $C_{(0,\infty)}$ natomiast A $(A(0) = 0)$ jest operatorem ograniczonym określonym w kuli $\|x\| \leqslant \varrho$ i mającym w punkcie $x = 0$ różniczkę Frecheta Bx przy czym reszta $(A—B)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $\delta(\varrho) \to 0$ przy $\varrho \to 0$. Układ jest stabilny w sensie Lapunowa jeżeli λ jest wartością regularną operatora liniowego B.

Dowód jest analogiczny, jak w przypadku twierdzenia 3. Operator A da się przedstawić w postaci $Ax = Bx + \mathbf{w}x$ gdzie $\frac{\|\mathbf{w}x_1 - \mathbf{w}x_2\|}{\|x_1 - x_2\|} \leqslant \delta(\varrho)$ dla

$\|x_1\|, \|x_2\| < \varrho$, przy czym $\delta(\varrho) \to 0$ przy $\varrho \to 0$. Dla λ będącego wartością regularną operatora B równanie $x = \lambda A x + w$ można przedstawić w postaci $x = \lambda N_\lambda w x + N_\lambda w$, gdzie $N_\lambda = (I - \lambda B)^{-1}$. Jeżeli spełnione są warunki: $|\lambda| \cdot \|N_\lambda\| \cdot \delta(\varrho) < 1$ i $\|N_\lambda w\| \leqslant [1 - |\lambda| \, \|N_\lambda\| \delta(\varrho)] \, \varrho$ to zgodnie z twierdzeniem Banacha równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie przy czym dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy $\|x\| < \varepsilon$ jeżeli tylko $\|w\| < \dfrac{1 - |\lambda| \cdot \|N_\lambda\| \, \delta}{\|N_\lambda\|} \min(\varrho, \varepsilon)$ c. n. d.

W ogólnym przypadku istnieją jednak poważne trudności przy określeniu widma operatora B * i szacowaniu normy rezolwenty.

5. STABILNOŚĆ ASYMPTOTYCZNA UKŁADU NIELINIOWEGO

Układ nazywać będziemy stabilnym asymptotycznie jeżeli pobudzony drganiami $z(t)$ (ewentualnie „warunkami początkowymi" $w(t)$) znikającymi dla $t \to \infty$ daje odpowiedź $x(t)$ również znikającą w nieskończoności.

Warunki stabilności asymptotycznej nieliniowego układu elektrycznego rozpatrywać będziemy w innej niż dotąd przestrzeni funkcyjnej.

Rozpatrzmy w zupełnej przestrzeni Banacha $C_{[0,\infty)}$ podzbiór N funkcji znikających w nieskończoności. Podzbiór ten stanowi liniową podprzestrzeń przestrzeni $C_{[0,\infty)}$ i to podprzestrzeń domkniętą, to znaczy, że jeżeli ciąg funkcji $x_n(t) \in N$ jest zbieżny do funkcji $x(t)$ w tym sensie, że $\|x_n(t) - x(t)\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, to funkcja graniczna ciągu $x(t) \in N$.

Utwórzmy teraz przestrzeń ilorazową C/N. [3]. Elementami tej przestrzeni będą klasy X funkcji $x(t) \in C_{(0,\infty)}$ jednakowo zachowujących się w nieskończoności. Dwie funkcje x_1 i x_2 zaliczamy do tej samej klasy wtedy i tylko wtedy gdy $x_1 - x_2 \in N$. Funkcje x_1 i x_2 nazywamy wtedy równoważnymi. Sumę dwóch elementów X i Y przestrzeni C/N określamy jako klasę funkcji równoważnych z funkcją $x(t) + y(t)$ gdzie $x(t) \in X$, $y(t) \in Y$. Iloczyn X przez liczbę a jest klasą aX funkcji $ax(t)$ gdzie $x(t) \in X$. Elementem zerowym przestrzeni C/N jest klasa N.

Tak określona przestrzeń ilorazowa C/N staje się liniową zupełną przestrzenią Banacha gdy określimy w niej normę $\| \|^*$ w następujący sposób [3]

$$\|X\|^* = \inf_{x \in X} \|x\| = \inf_{\Theta \in N} \sup_{t} |x(t) + \Theta(t)| = \lim_{T \to \infty} \sup_{T < t} |x(t)|. \tag{36}$$

Zbadamy teraz własności operatora liniowego K (określonego równ. 19) w przestrzeni C/N. Udowodnimy przede wszystkim następujący lemat

* Badaniem widma operatora Volterry w różnych przestrzeniach (między innymi również w $C_{(0,\infty)}$) zajmował się E. I. Goldengerszel: Spektr wolterowa operatora na połosi i Tauberowy teoremy typa Poleja—Winera. (ros.). Dokł. Akad. nauk. CCCP 1959 tom 129 Nr. 5 s. 971—974.

L e m a t 2. *Jeżeli* $\int\limits_0^\infty |k(t)|\, dt < \infty$ *to operator* K *jest jednorodnym, to znaczy z tego że* $x \in N$ *wynika że* $Kx \in N$.

Dowód: Wprowadźmy oznaczenia $\int\limits_0^\infty |k(t)|\, dt = M_1$, $\sup |x(t)| = M_2$. Z założenia wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie T_1 że $\int\limits_T^\infty |k(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2M_2}$ jeżeli tylko $T \geqslant T_1$. Jeżeli $x(t) \in N$ to istnieje takie T_2, że $|x(t)| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$ dla każdego $t \geqslant T_2$. Stąd dla każdego $t \geqslant T_1 + T_2$ mamy:

$$\left|\int\limits_0^t k(t-\tau)\, x(\tau) d\tau\right| = \left|\int\limits_0^t k(\tau)\, x(t-\tau) d\tau\right| \leqslant \left|\int\limits_0^{T_1} k(\tau)\, x(t-\tau) d\tau\right| + \left|\int\limits_{T_1}^t k(\tau)\, x(t-\tau) d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2M_1} \int\limits_0^{T_1} |k(\tau)|\, d\tau + M_2 \int\limits_{T_1}^t |k(\tau)|\, d\tau < \varepsilon \text{ i wobec tego } Kx \in N. \qquad \text{c.n.d.}$$

Z lematów 1 i 2 wynika natychmiast twierdzenie:

T w i e r d z e n i e 4. *Operator* K *jest liniowym w przestrzeni* C/N *wtedy i tylko wtedy gdy* $M(s)$ *nie znika w żadnym punkcie półpłaszczyzny* $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$ (gdzie $\frac{L(s)}{M(s)} = \mathcal{L}[k(t)]$).

Norma operatora K w przestrzeni C/N spełnia nierówność

$$\|K\|^* \overset{df}{=} \sup_{\|X\|^*=1} \|KX\|^* \leqslant \|K\|. \tag{37}$$

Zachodzi również analogiczne do twierdzenia 2 następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e 5. *Operator* K *posiada w przestrzeni* C/N *rezolwentę wtedy i tylko wtedy gdy* $\lambda L(s) - M(s)$ nie znika w żadnym punkcie półpłaszczyzny $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$.

Widmo operatora K jest więc w obu przestrzeniach $C_{[0,\infty)}$ i C/N takie samo.

Układ elektryczny liniowy w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego opisze się teraz równaniem jednorodnym:

$$X = \lambda K X \tag{38}$$

ponieważ „warunki początkowe" $w(t)$ w przypadku gdy K jest operatorem liniowym są funkcją należącą do N (zera przestrzeni C/N). Jeżeli λ należy do zbioru rezolwenty operatora K to równanie (38) posiada jedyne rozwiązanie zerowe ($X = N$) i układ jest asymptotycznie stabilny.

Dla układów liniowych zwykła stabilność w sensie Lapunowa jest więc równoważna stabilności asymptotycznej.

Zajmiemy się teraz czwórnikiem nieliniowym opisanym przez operator:

$$\mathbf{f}X = f[x(t)], \quad \text{gdzie} \quad x(t) \epsilon X \tag{39}$$

Z ciągłości funkcji $f(x)$ wynika, że $\mathbf{f}(X+N)=\mathbf{f}X$ a jeśli oprócz tego funkcja $f(x)$ spełnia założenia (26) i (27) to wszystkie uwagi o warunku Lipschitza dla operatora $\mathbf{f}$ w przestrzeni C/N są analogiczne jak w przestrzeni $C_{[0,\infty)}$.

Układ nieliniowy przedstawiony na rys. 1 opisze się teraz równaniem jednorodnym

$$X = \lambda K \mathbf{f} X. \tag{40}$$

Układ będzie stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie (40) posiada jedyne rozwiązanie zerowe ($X=N$) w przestrzeni C/N.

W przypadku gdy λ należy do zbioru rezolwenty operatora K to równanie (40) jest równoważne równaniu

$$X = -\lambda R_\lambda \mathbf{w} X \tag{41}$$

i posiada jedyne rozwiązanie zerowe w kuli $\| X \|^* < \varrho$, gdy

$$|\lambda| \, \|R_\lambda\|^* \, \delta(\varrho) < 1. \tag{42}$$

Nazwijmy obszarem stabilności asymptotycznej zbiór punktów o współrzędnych (λ, ϱ) takich, że układ o wzmocnieniu λ nie może generować drgań $x(t)$ o normie $\|X\|^* = \varrho$.

Oczywiście punkty spełniające nierówność (42) leżą w obszarze stabilności asymptotycznej. Obszar ten można jednak znacznie rozszerzyć poza zakres określony nierównością (42). W tym celu załóżmy, że układ wzbudza się dając drgania $x(t) \epsilon X$ o normie $\|X\|^* = \varrho \neq 0$. Wówczas równanie (41) musi mieć niezerowe rozwiązanie X dla którego zachodzi nierówność

$$\varrho = \|X\|^* \leq |\lambda| \, \|R_\lambda\|^* \sup_{\|X\|^* = \varrho} \|\mathbf{w}X\|^* \tag{43}$$

Funkcję $\varphi(\varrho) = \sup\limits_{\|X\|^* = \varrho} \|\mathbf{w}X\|^*$ łatwo jest otrzymać mając daną funkcję $w(x)$. Np. dla $w(x)$ nieparzystej i monotonicznie rosnącej $\varphi(\varrho) = w(\varrho)$. Stąd punkty spełniające nierówność

$$\varrho > |\lambda| \, \|R_\lambda\|^* \varphi(\varrho) \tag{44}$$

leżą w obszarze stabilności asymptotycznej.

Nierówność (44) ma oczywiście sens jedynie dla λ należących do zbioru rezolwenty operatora K. Natomiast dla każdej wartości λ, jak

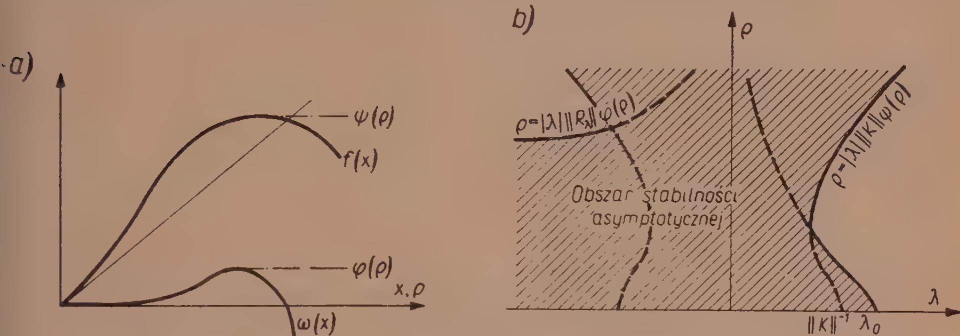
wynika z równania (40), układ może wzbudzić się jedynie na drganiach o normie $\| X \|^* = \delta$ spełniającej nierówność:

$$\delta = \| X \|^* \leqslant | \, \| K \|^* \sup_{\|X\|^* = \varrho} \| \mathbf{f} X \|^* \tag{45}$$

Wobec tego punkty dla których:

$$\varrho > | \lambda | \, \| K \|^* \psi(\varrho) \tag{46}$$

gdzie $\psi(\varrho) = \sup_{\|X\|^* = \varrho} \| \mathbf{f} X \|^*$, leżą również w obszarze stabilności asymptotycznej. Na rys. 8 podano przykładowy wykres funkcji $f(x)$ i otrzymany dla niej wykres obszarów stabilności asymptotycznej.



Rys. 8. Przykładowy wykres a) charakterystyk czwórnika nieliniowego F i b) obszarów stabilności asymptotycznej.

WYKAZ LITERATURY

1. Krasnosielski M. A.: *Topologiczeskije metody w teorji nieliniejnych integralnych urawnienij*. Moskwa 1956.
2. Kulikowski R.: *On the theory of non-linear oscyllators*. Bull. Acad. Polon. Sci. Série des sci. techn. vol. VI nr. 6. 1958.
3. Lusternik L. A. i Sobolew W. I.: *Elementy analizy funkcjonalnej*. Warszawa 1959 PWN (tłum. z ros.).
4. Małkin I. T.: *Teorja ustojcziwości dwiżenja*. Moskwa-Leningrad 1952.
5. Weinberg M. M.: *Warcjacjonnyje metody issledowania nieliniejnych operatorów*. Moskwa 1956.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В работе исследуется стабильность системы, блок-схема которой приведена на рис. 1. Система состоит из цепного соединения нелинейного четырехполюсника F, идеального усилителя с коэффициентом усиления λ и линейного четырехполюсника K, работающих в замкнутой ветви обратной связи. Характеристики отдельных элементов системы даны равенствами (1) (3) (4). Исследование стабильности сводится в этом случае к исследованию существования

решений уравнения (11) определяющего колебания электрической системы и зависимости решения от функции $\omega(t)$, характеризирующей начальные условия или случайные внешние нарушения воздействующие на систему. Решения разыскиваются среди элементов линейного пространства Банаха $C_{[0,\infty)}$ с нормой определенной равенством (8). Доказано, что для достаточно малых λ (удовлетворяющих неравенству (12)) нелинейная система стабильна согласно критериям Ляпунова.

Значитеьно подробнее рассмотрен случай не параметрических систем, составленных из сосредоточенных элементов, имеющих параметры не изменяющиеся во времени. Доказано, что в этом случае нелинейная система стабильна тогда, когда стабильна линеаризированная система. (Линеаризированной называется система в которой нелинейная характеристика $f(x)$ четырехполюсника F заменена линейной $f'(0)x$). Стабильность линеаризированной системы можно исследовать применяя различные известные критерии для линейных систем (например критерий Никлиста). Получено неравенство (35) определяющее допустимую амплитуду помех приложенных извне к системе или возникающих из-за начальных условий, для которых система еще стабильна.

В заключение рассуждений над стабильностью в смысле критериев Ляпунова приведена некоторая обобщенная теорема о линеаризации нелинейной системы. Доказано, что если нелинейная система определена равенством $x=\lambda Ax+w$, где A оператор ограниченный в шаре $\|x\|\leqslant\varrho$ имеющей в точке $x=0$ дифференциал Фрешета Bx, а остаток $(A-B)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\delta(\varrho)\to 0$ при $\varrho\to 0$, то система является стабильной по Ляпунову если только λ является регулярной точкой линейного оператора B.

В последней части работы исследуются условия так называемой асимптотической стабильности системы (система стабильна асимптотически если по возбуждении затухающими колебаниями для $t\to\infty$ дает результат аналогически затухающий в бесконечности). Метод исследования стабильности заключается в поисках решения уравнения определяющего колебания в системе среди элементов факторпространства $C_{[0,\infty)}/N$, где N определяет класс функций затухающих для $t\to\infty$. Найдены некоторые неравенства (44) (46) позволяющие на вычерчивание в системе координат λ, ϱ) так называемых областей асимптотической стабильности. Если точка со значением координат (λ, ϱ) находится в области асимптотической стабильности, то система с коэффициентом усиления λ не может генерировать незатухающих колебаний с амплитудой ϱ. Это позволяет на дискуссию диапазона стабильности и оценку амплитуды генерируемых колебаний в зависимости от коэффициента усиления λ.

EXAMINATION OF STABILITY OF ELECTRIC NONLINEAR NETWORKS BY METHODS OF FUNCTIONAL ANALYSIS

The work is concerned with the examination of stability of the network, whose block diagram is given in Fig. 1. The network consists of chain junction of nonlinear two terminal-pair network F, ideal amplifier with the amplification coefficient λ and linear two terminal-pair network K all operating in closed feedback loop. The characteristics of the individual network members are described by the equation (1), (2), (4).

The object of the examination of stability is to explore the existence of the solution of equation (11) which describes the electric phenomena in the network and to detect the dependencies of the solution on the function $\omega(t)$ which characterizes the initial conditions and the incidental disturbances applied externally to

the network. The possible solutions are to be found amongst the elements of the linear space of Banach $C_{(0,\infty)}$ with the norm determined by equation (8). It is proved that the nonlinear network is stable in sense of Lapunov for small λ satisfying the equation (12).

More detailed examination is carried out for the case of nonparametric networks combined out of the concentrated elements with the parameters unvarying in time. It is proved that in such a case the nonlinear network is stable of the linearized network is stable as well. (Under a linearized network such a network is understood in which the nonlinear characteristic $f(x)$ of the two terminal-pair network F is replaced by the linear one $xf'(0)$. To examine the stability of the linearized network all known criteric valid for the linear network may be used (for example the criterion of Nequist). The derived inequality (35) determines the permissible amplitude of disturbances acting externally on the network or emerged due to the initial conditions for which the network remains still stable.

In final part of stability examination in sense of Lapunow a certain general conclusion with regard to the linearization of the nonlinear network is given. It is proved that if a nonlinear parametric network may be described by the equation $x=\lambda Ax+\omega$, where A is the operator limited within the sphere $\|x\|\leqslant\varrho$ having the differential of Frechet Bx at the point $x=0$ and the remainder $(A-B)$ satisfies the condition of Lipschitz with the constant $\delta(\varrho)\to 0$ at $\varrho\to 0$, then this network is stable in sense of Lapunow under condition of λ being regular value of the linear operator B.

In final part of the work the conditions of so-called asymptotic stability of the network are being examined. (The network is asymptotically stable if being excited by the damping oscillations for $t\to\infty$ gives a response, which damps in the infinity as well.

The examination method of the network stability whose oscillations are described by the equation consists in finding out of the solutions among the elements of the factor space $C_{[0,\infty)}/N$ where N is the class of functions which damp at $t\to\infty$.

Certain inequalities (44), (46) enabling to trace so-called regions of asymptotic stability in the system of coordinates (λ,ϱ) are derived. If the point corresponding to the coordinates (λ,ϱ) lies in the region of the asymptotic stability, then the network with the coefficient of amplification λ cannot generate the oscillations with amplitude ϱ. This enabled to discuss the stability range and to estimate the eventual amplitude of the generated oscillations with regard to the coefficient of amplification λ.

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM X ZESZYT 1 1961

621.315.2

J. L. JAKUBOWSKI

Schemat zastępczy kabla energetycznego zakopanego w ziemi

Rękopis dostarczono 31. 8. 1960 r.

Wychodząc z opracowań J. L. Maksiejewskiego ([3], [4]) autor w inny sposób, oparty o prace A. Sommerfelda [6], określa impedancję związaną ze strumieniem w ziemi. Pozwala to na bardziej dokładną interpretację schematu A. F. Bogomołowa [1], jako uproszczenia schematu ogólnego, podanego przez Maksiejewskiego [4].

1. WSTĘP

W pracach [3] i [4] Maksiejewski przedstawia teorię fal sinusoidalnych w dielektryku kabla i w ziemi, otaczającej płaszcz kabla, w założeniu że płaszcz styka się na całej swej powierzchni z gruntem sięgającym do nieskończoności. Fale w ziemi zwykle pomija się, w pewnych przypadkach jednak należy je uwzględnić, mianowicie wtedy gdy przewodność gruntu jest mała.

Maksiejewski wychodzi z równań Maxwella i uzyskuje wzory pozwalające ściśle obliczać przebiegi falowe i zestawiać układy zastępcze dla obliczeń uproszczonych. Ze względu na założone liniowe własności ośrodków (dielektryk, ziemia), zadanie jakie sobie postawił J. L. Maksiejewski można rozwiązać bądź traktując cały system żyła-płaszcz-ziemia jako jeden układ elektryczny, bądź też stosując zasadę superpozycji pól i obliczając oddzielnie fale pobudzone w układzie żyła-płaszcz i oddzielnie w układzie płaszcz-ziemia. Drugi sposób pozwala wykorzystać — po uwzględnieniu pewnych modyfikacji — rozwiązanie Thomsona [7] [1] dla kabla morskiego (odpowiednik układu żyła-płaszcz kabla energetycznego) i rozwiązanie Sommerfelda [6] [1] dla przewodu samotnego (odpowiednik układu płaszcz-ziemia). Maksiejewski wybrał sposób pierwszy, ogólniejszy i uzyskał rezultaty zgodne z wynikami, jakie pozwalają przewidzieć obliczenia na podstawie prac Thomsona i Sommerfelda. W niniejszej pracy będzie zastosowany jednak sposób drugi, gdyż rozbijając system na dwa układy, łatwiej można uchwycić sens fizyczny rozważań matematycznych.

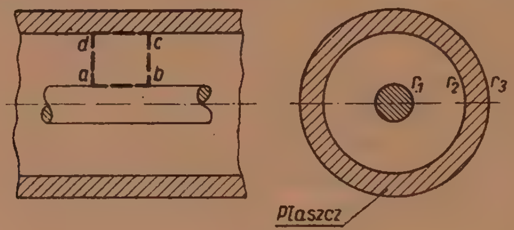
[1] Patrz również [5].

Uogólnienie rozważań, dotyczących układu walcowego wielowarstwowego, jakim jest kabel zakopany w ziemi, pozwoliło Maksiejewskiemu zestawić ogólny schemat zastępczy dla fal sinusoidalnych ze stałymi rozłożonymi. Schemat ten umożliwia wyciągnięcie wielu interesujących wniosków. W szczególności autor tłumaczy przy jego pomocy, przedstawiony przez Bogomołowa, schemat uproszczony ze stałymi skupionymi, który w pracy źródłowej [1] jest podany bez uzasadnienia. Ten fragment artykułu Maksiejewskiego [4] wymaga według mnie uzupełnienia. Sformułowanie Maksiejewskiego ([4], str. 554), że układ Bogomułowa nie uwzględnia impedancji drogi prądu w ziemi, może być niewłaściwie rozumiane. Układ ten uwzględnia mianowicie część bierną wzmiankowanej impedancji, a pomija część czynną, co można uznać za dopuszczalne.

Aby lepiej sprecyzować ten punkt widzenia, a zwłaszcza, aby uwypuklić sens fizyczny impedancji drogi prądu w ziemi, należy wyjść z podstawowych rozważań i ogólnie przyjętych definicji, dotyczących zestawiania schematu zastępczego dla linii długich.

2. PODSTAWOWY SCHEMAT ZASTĘPCZY DLA LINII DŁUGICH

Najpierw rozpatrzymy linię długą pod postacią kabla koncentrycznego, to jest układu walców współśrodkowych izolowanych jednorodnym die-



Rys. 1.

lektrykiem (stałe ε, μ, σ) (rys. 1). Zastosujemy oznaczenia, jak w cytowanych pracach Maksiejewskiego [3] i [4].

Obliczymy całkę $\oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l}$ wzdłuż drogi $a-b-c-d$ (rys. 1). Tutaj $\mathbf{E}_m$ oznacza amplitudę natężenia pola elektrycznego o przebiegu $\mathbf{E}_m \cdot e^{j\omega t}$, $d\mathbf{l}$ — element długości. Całka ta, z jednej strony równa się

$$\oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = E_{mx1} \Delta x - E_{mx2} \Delta x + \frac{\partial U_{mk}}{\partial x} \Delta x, \tag{1}$$

gdzie

E_{mx1} — składowa $\mathbf{E}_m$ w kierunku x, w odległości r_1 od osi układu (to jest na powierzchni żyły);

E_{mx2} — składowa $\mathbf{E}_m$ w kierunku x, w odległości r_2 od osi układu (to jest na wewnętrznej powierzchni płaszcza);

U_{mk} — napięcie między powierzchnią żyły (r_1) i wewnętrzną powierzchnią płaszcza (r_2).

Z drugiej strony wzmiankowana całka $\oint \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{dl}$ musi odpowiadać sile elektromotorycznej wywołanej zmianami strumienia magnetycznego objętego drogą całkowania:

$$\oint \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{dl} = -j\omega\Delta\Phi = -j\omega L' \Delta x I_{mk}. \tag{2}$$

Tutaj

$L'\Delta x$ — indukcyjność odpowiadająca strumieniowi $\Delta\Phi$, to jest indukcyjność zewnętrzna,

I_{mk} — prąd w żyle kabla.

Wyrażenie (2) stanowi definicję wielkości L', wiążącą wielkość strumienia $\Delta\Phi$ z całkowitym prądem w żyle kabla.

Zestawiając oba wyrażenia na $\oint \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{dl}$ otrzymamy

$$-\frac{\partial U_{mk}}{\partial x} = j\omega L' I_{mk} + E_{mx1} - E_{mx2}. \tag{3}$$

Jest ogólnie przyjęte uważać E_{mx1} za spadek napięcia wywołany przepływem całkowitego prądu I_{mk} przez impedancję własną żyły:

$$E_{mx1} = I_{mk} Z_1 = I_{mk}(R_1 + j\omega L_1). \tag{4}$$

Wielkości R_1 i ωL_1 nazywamy składową czynną i bierną impedancji wewnętrznej żyły. Oporność czynna, jak można wykazać za pomocą zespolonego wektora Poyntinga, określa straty w żyle według zależności $I_{mk}^2 R_1$, a reaktancja ωL_1 — energię magnetyczną zawartą w polu wewnątrz żyły $\frac{1}{2} L_1 I_{mk}^2$.

Analogicznie przyjmujemy

$$E_{mx2} = -I_{mk} Z_3 = -I_{mk}(R_3 + j\omega L_3), \tag{5}$$

gdzie Z_3 to impedancja wewnętrzna płaszcza.

Ostatecznie

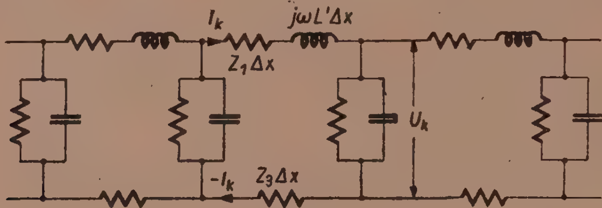
$$-\frac{\partial U_{mk}}{\partial x} = I_{mk}(Z_1 + Z_3 + j\omega L'). \tag{6}$$

Jest to pierwsze podstawowe równanie dla linii długich. Drugie równanie otrzymujemy, wprowadzając upływność i pojemność G i C:

$$-\frac{\partial I_{mk}}{\partial x} = U_{mk}(G + j\omega C). \tag{7}$$

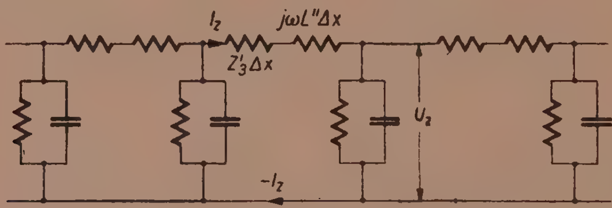
Równania (6) i (7) upoważniają do stosowania schematu zastępczego ze stałymi rozłożonymi R, L, G, C (rys. 2). Schemat ten pozwala określić interesujące nas zmiany przestrzenne wartości napięcia U_{mk} i prądu I_{mk}. Dotyczy on układu żyła-płaszcz, stanowiącego — zgodnie z zasadą superpozycji — część pełnego układu żyła-płaszcz-ziemia.

Układ płaszcz-ziemia można uważać za przewód samotny (płaszcz) umieszczony w ziemi. Schemat zastępczy dla przewodu samotnego jest odmianą schematu z rys. 2 w założeniu, że druga elektroda jest w nie-



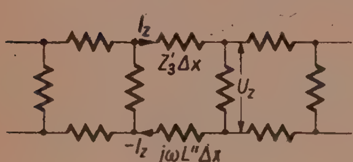
Rys. 2.

skończoności. Wprowadzając nowe oznaczenia, otrzymamy układ jak na rys. 3. Tutaj Z_3 oznacza impedancję wewnętrzną płaszcza, a L'' indukcyjność, odpowiadającą strumieniowi magnetycznemu w ziemi. Wartość



Rys. 3.

Z'_3 w układzie płaszcz-ziemia jest przy tym różna od wartości Z_3 w układzie żyła-płaszcz.



Rys. 4.

Ponieważ jest obojętne, czy w schemacie zastępczym oporność $j\omega L''$ jest w górnej, czy dolnej gałęzi, do dalszych rozważań zastosujemy schemat z rys. 4 (w schemacie tym pominięto również C, jako czynnik nieistotny w porównaniu z G).

Wzór (6) dla układu płaszcz-ziemia przyjmuje postać

$$-\frac{\partial U_{mz}}{\partial x} = I_{mz}(Z'_3 + j\omega L''), \tag{8}$$

gdzie U_{mz} — napięcie płaszcz-nieskończoność,

I_{mz} — prąd w płaszczu.

3. SCHEMAT OGÓLNY DLA UKŁADU ŻYŁA-PŁASZCZ-ZIEMIA

Jak wzmiankowano wyżej, kabel zakopany w ziemi można uważać za połączenie układów żyła-płaszcz i płaszcz-ziemia, pobudzonych niezależnie. Pola obu tych układów występują jednocześnie we wszystkich warstwach: w elektrodach, w izolacji i w ziemi.

Szczególną rolę w skojarzeniu układów odgrywa płaszcz kabla. Napięcie żyła-płaszcz U_{mk} jest według wzoru (6) zależne od spadku napięcia $-I_{mk}Z_3$ na wewnętrznej powierzchni płaszcza, a napięcie płaszcz-nieskończoność U_{mz} według wzoru (8) — od spadku napięcia $I_{mz}Z_3'$ na zewnętrznej powierzchni płaszcza. Ale na wewnętrznej powierzchni płaszcza występuje dodatkowo spadek, związany z układem płaszcz-ziemia. Spadek ten możemy określić, jako $I_{mz}\ Z_{31}$ (analogicznie do spadku $I_{mz}Z_3$). Podobnie na zewnętrznej powierzchni płaszcza występuje dodatkowo spadek, związany z układem żyła-płaszcz, który możemy określić jako $-I_{mk}Z_{13}$ (analogicznie do $-I_{mk}Z_3$).

Dodatkowe spadki na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni płaszcza dodają się do spadków istniejących, muszą być więc uwzględnione w równaniach (6) i (8) oraz odpowiadających im schematach. Jak nietrudno przy tym udowodnić, że $Z_{13}=Z_{31}$; jest to impedancja sprzęgająca oba obwody. Otrzymujemy dla układu żyła-płaszcz

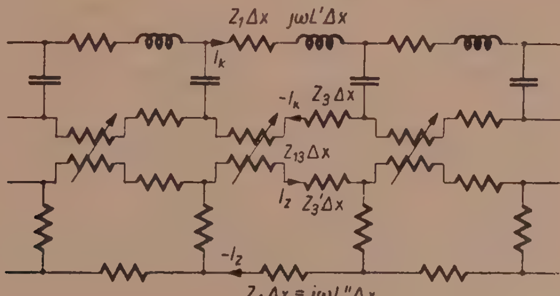
$$-\frac{\partial U_{mk}}{\partial x}=I_{mk}(Z_1+Z_3+j\omega L')-I_{mz}Z_{31} \tag{9}$$

dla układu płaszcz-ziemia

$$-\frac{\partial U_{mz}}{\partial x}=I_{mz}(Z_3'+j\omega L'')-I_{mk}Z_{13}. \tag{10}$$

Równania powyższe upoważniają do stosowania schematu ogólnego Maksiejewskiego ([4], rys. 3), który podaje w nieco innej postaci rys. 5.

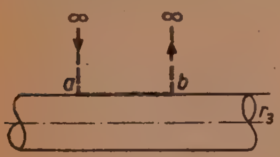
Jak wynika z podanego wyżej wyprowadzenia schematu ogólnego, $Z_4=j\omega L''$ oznacza fizycznie impedancję związaną ze strumieniem magnetycznym w ziemi, czyli impedancję zewnętrzną układu płaszcz-ziemia.



Rys. 5.

4. WARTOŚĆ IMPEDANCJI ZEWNĘTRZNEJ UKŁADU PŁASZCZ-ZIEMIA (Z_4)

Wartość $Z_4 = j\omega L''$ najprościej określić ze strumienia objętego drogą całkowania $a - b - \infty - a$ (rys. 6). Wynosi ona



Rys. 6.

$$Z_4 \Delta x = j\omega L'' \Delta x = \frac{j\omega \Delta \Phi}{I_{mz}} = \frac{j\omega\mu_4}{I_{mz}} \Delta x \int_{r_3}^{\infty} H dr =$$

$$= \frac{j\omega\mu_4 \Delta x}{2\pi r_3 k_4} \frac{|K_0(k_4 r)|_{r_3}^{\infty}}{K_0'(k_4 r_3)} \approx j \frac{\omega\mu_4 \Delta x}{2\pi} \ln \frac{2}{\gamma_e k_4 r_3}. \tag{11}$$

Oznaczenia i wyrażenie na natężenie pola magnetycznego H wzięto z opracowań [3] i [4]. K_0 oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela drugiego rodzaju zerowego rzędu, $\gamma_e = 1{,}7811$ — stałą Eulera.

Mnożąc licznik i mianownik wzoru (11) przez $(\sigma + j\omega\varepsilon)$ otrzymujemy

$$Z_4 = j\omega L'' = \frac{h_4^2}{2\pi(\sigma + j\omega\varepsilon)} \ln \frac{2}{\gamma_e k_4 r_3} = \frac{j\omega\mu_4}{2\pi} \ln \frac{2}{\gamma_e k_4 r_3} \tag{12}$$

Maksiejewski [4], w oparciu o opracowanie J. R. Carsona [2], przyjmuje dla określenia Z_4, że płaszcz posiada powłokę izolacyjną, wyznacza E_{mx} wzdłuż zewnętrznej powierzchni tej powłoki ($r = r_b$), po czym grubość powłoki sprowadza do zera (założenie $r_b = r_3$). Autor dochodzi do prawidłowego wzoru na Z_4, przyjmując założenie $\gamma = 0$, przy czym γ jest współczynnikiem przenoszenia, występującym w wykładniku $e^{j\omega t - \gamma x}$. Przy tym założeniu $k_4^2 = h_4^2$ i wzór (5) w pracy [1] przechodzi w postać (6) odpowiadającą naszemu wzorowi (12), jeśli we wzorze (12) założyć $k_4 = \sqrt{j}\, k_z$. Założenie takie stanowi przybliżenie, gdy dokładna wartość k_4 nie jest znana.

Podane wyżej bezpośrednie wyprowadzenie wzoru na Z_4 oparte jest o prace A. Sommerfelda ([5] i [6]). Wartość tego wyprowadzenia, wychodzącego wprost ze znaczenia fizycznego Z_4, polega jeszcze na tym, że pozwala ono na łatwą interpretację schematów zastępczych.

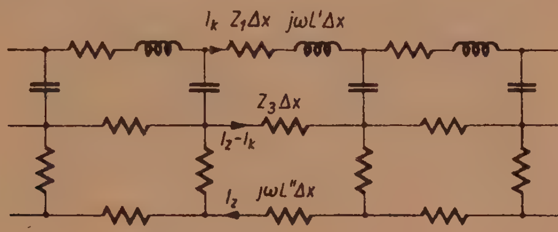
5. SCHEMAT BOGOMOŁOWA

Gdy częstotliwość jest poniżej pewnej granicy, schemat ogólny, jak wykazuje Maksiejewski [4], można sprowadzić do schematu prostszego (rys. 7). Wtedy mianowicie $Z_3 \approx Z_3 \approx Z_{13}$ (części urojone tych impedancji są małe wobec części rzeczywistych, a części rzeczywiste są w przybliżeniu równe). W tych warunkach zachodzi równość spadków napięcia na środkowych poziomych gałęziach schematu z rys. 5:

$$-I_{mk} Z_3 \Delta x + I_{mz} Z_{31} \Delta_x = I_{mz} Z_3' \Delta x - I_{mk} Z_{13} \Delta_x \tag{13}$$

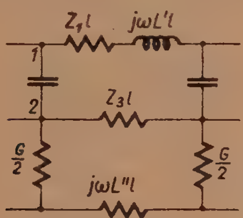
Można więc uważać, że istnieje tylko jedna gałąź środkowa, wspólna dla górnej i dolnej części schematu, w której płynie prąd $I_{mz} - I_{mk}$ i która ma impedancję $Z_3 = Z_3' = Z_{31} = Z_{13}$.

Schematy o stałych rozłożonych zastępuje się często dla celów praktycznych przez linie łańcuchowe o większej lub mniejszej liczbie ogniw, przy czym skrajne przypadki stanowią tzw. układy typu Π i T. Schemat typu Π odpowiadający rys. 7 przedstawia rys. 8, przy czym l oznacza całkowitą długość kabla. Schemat Bogomołowa ([1], rys. 2 dolny), który

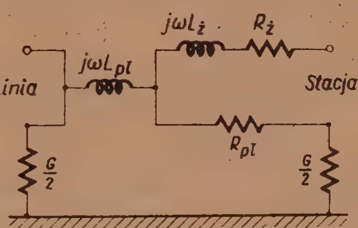


Rys. 7.

powtarzam na rys. 9, jest pochodnym schematu przedstawionego na rys. 8, dla przypadku, gdy na początku kabla żyła i płaszcz są zwarte (przez ochronnik wydmuchowy). Bogomołow pomija ponadto pojemność kabla.

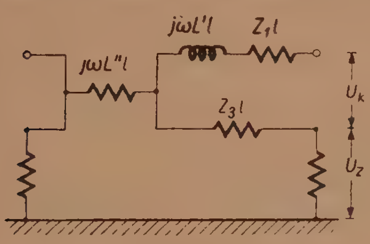


Rys. 8.

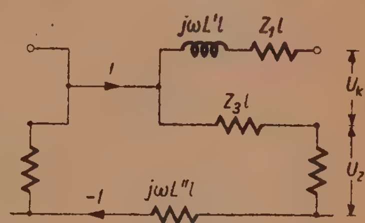


Rys. 9.

Rzeczywiście, schemat z rys. 8, przy zwarciu punktów 1 i 2 można przedstawić, jak na rys. 10a i b. Schemat z rys. 10b jest równoważny schematowi z rys. 10a, jeśli chodzi o napięcia U_{mk} i U_{mz}, gdyż jest obojętne, czy indukcyjność $j\omega L''l$ jest w gałęzi górnej, czy dolnej schematu.



Rys. 10a.



Rys. 10b.

Na rys. 10b ziemię oczywiście należy uważać jako idealną, o potencjale zero. Jeśli uwzględnić, że $Z_1 l$ i $Z_3 l$ dla dostatecznie małych częstotliwości są opornościami czynnymi (R_z — oporność żyły $\equiv Z_1 l$, $R_{pł}$ — oporność

płaszcza $\equiv Z_3 l$), to schematy z rys. 9 i 10b są identyczne. Oczywiście trzeba założyć, że $L_{pł}$ — indukcyjność płaszcza to L'' — indukcyjność zewnętrzna, związana ze strumieniem w ziemi. Taka była niewątpliwie intencja Bogomołowa przy zestawianiu schematu.

Inna sprawa, że impedancja zewnętrzna płaszcza nie jest czystą reaktancją, ale posiada — mimo że według definicji jest to oporność indukcyjna — niewielką składową rzeczywistą. Jest to osobliwość (porównaj [5], str. 259) wynikająca stąd, że wyprowadzając wzór (8) traktujemy formalnie strumień $\Delta\Phi$, jako wytworzony przez całkowity prąd I_{mz} w płaszczu. W rzeczywistości strumień ten związany jest również z prądami w dielektryku, które są przesunięte w fazie w stosunku do prądu w przewodzie. Zespolony charakter $j\omega L''$ wynika oczywiście ze wzoru (12). Uwzględniając, że k_4 jest liczbą zespoloną

$$k_4 = a + jb = Ae^{j\alpha},$$

otrzymujemy dla wzoru (12) postać

$$Z_4 = j\omega L'' = \frac{j\omega\mu_4}{2\pi} \ln \frac{2}{\gamma_e A e^{j\alpha} r_3} = \frac{\omega\mu_4 \alpha}{2\pi} + j\frac{\omega\mu_4}{2\pi} \ln \frac{2}{\gamma_e A r_3}. \tag{14}$$

W przypadku rozpatrywanym przez Maksiejewskiego

$$k_4 = (0{,}5643 - j\,1{,}658)\,10^{-2} = 1{,}7514\,10^{-2} e^{-j1{,}2427}$$

$$Z_4 = j\omega L'' = -1{,}5615 + j\,12{,}03\,.$$

Jak widać przy obliczeniach orientacyjnych, do których służy schemat Bogomołowa, pominięcie części rzeczywistej $j\omega L''$ wobec urojonej, można uznać za dopuszczalne.

6. WNIOSKI

1. Uzasadnienie schematu ogólnego Maksiejewskiego dla kabla zakopanego w ziemi można przeprowadzić w sposób prostszy, rozważając oddzielnie układ żyła-płaszcz i oddzielnie układ płaszcz-ziemia i korzystając z zasady superpozycji.
2. Schemat Bogomołowa dla kabla zwartego na jednym krańcu jest zgodny ze schematem ogólnym Maksiejewskiego, a w szczególności uwzględnia impedancję zewnętrzną, związaną ze strumieniem magnetycznym w ziemi. Schemat ten pomija składową czynną tej impedancji, co jest w wielu przypadkach dopuszczalne.
3. Wzór na impedancję zewnętrzną płaszcza najprościej otrzymać, określając bezpośrednio strumień magnetyczny w ziemi.

WYKAZ LITERATURY

1. Bogomołow A. F.: *Efiektiwnost' kabielnych podchodow pri priamych udarach mołnii w wozdusznyje linji,* Elektriczeskije Stancii, 1941, z. 13—14, s. 19.
2. Carson J. R.: *Ground return impedance underground wire with earth return,* Bell System Techn. Journal 1929, s. 94.
3. Maksiejewski J. L.: *Rozchodzenie się fal sinusoidalnych w podejściu kablowym przy uwzględnieniu wpływu ziemi,* Arch. Elektr. t. VI, z. 3, 1957.
4. Maksiejewski J. L.: *Schemat zastępczy podejścia kablowego z uwzględnieniem wpływu ziemi,* Arch. Elektr., t. VI, z. 4, 1957.
5. Schumann W. O.: *Elektrische Wellen,* Monachium, 1948.
6. Sommerfeld A.: Annal. d. Physik 67, 233, 1899.
7. Thomson J. J.: *Recent Researches...,* Oxford, 1893.

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КАБЕЛЯ ПРОЛОЖЕННОГО В ЗЕМЛЕ

В публикациях [3] и [4] Я. Л. Максеевски представляет теорию синусоидальных волн в диэлектрике кабеля и окружающей его земле, принимая, что оболочка кабеля соприкасается на всей своей поверхности с грунтом бесконечной протяженности.

Максеевски исходя из уравнений Максвелла получает формулы позволяющие точно вычислять волновые процессы и составлять эквивалентные схемы для приближенных расчетов.

Ввиду принятия линейных свойств для рассматриваемых сред (диэлектрик, грунт) задание поставленное Максеевским можно решить либо рассматривая совокупность системы жила — оболочка — земля как одно целое в смысле электрической системы, либо применяя суперпозицию полей и вычисляя отдельно волны возбужденные в системе жила — оболочка и отдельно в системе оболочка — земля.

Автор статьи избрал второй способ как более простой и позволяющий использовать выводы Томсона [7] и Зоммерфельда [6]. В качестве исходного положения автор принимает известную эквивалентную схему о распределенных параметрах для кабельной линии (рис. 2) с определяющими ее формулами (рис. 1. формулы 1 до 7), и известную эквивалентную схему для уединенного провода (рис. 3 и 4) со связанной с ней зависимостью (8).

Схемы по рисункам 2 и 4, относящиеся к независимо возбужденным системам жила — оболочка и оболочка — земля можно слагать учитывая добавочные напряжения вдоль внутренней и внешней поверхности оболочки, возникающие в обоих системах (формулы 9 и 10). После сложения получается общая схема Максеевского ([4] — рис. 3) — рис. 5.

Максеевски в [4] вычисляет импеданс $Z_4 = j\omega L''$ связанный с магнитным потоком в земле исходя из работ Карсона [2]. В настоящей же статье приведен вывод обоснованный на непосредственном вычислении упомянутого магнитного потока, полученный из рассуждений Зоммерфельда ([5], [6] — рис. 6 — формулы 11 и 12).

Автор доказывает, что схема типа П приведенная Богомоловым [1], относящаяся к кабелю замкнутому на конце трубчатым разрядником, рис. 9, эквивалентна упрощенной схеме Максеевского (рис. 8) получаемой из общей схемы (рис. 5). Эту эквивалентность иллюстрируют схему рис. 10, являющиеся видоизменениями схемы по рис. 9.

EQUIVALENT CIRCUIT FOR POWER-SYSTEM-CABLE IN GROUND

J. L. Maksiejewski [3], [4] has put forward the theory of sinusoidal waves in dielectric of a cable and in surrounding earth under the assumption that all the surface of the sheath of a cable touches to ground considered as infinite.

Maksiejewski has used the Maxwell's equations and has obtained the formulae allowing for rigorous computing of waves propagation and for seting up the equivalent-circuits for simplified calculations. Maksiejewski has supposed the linear properties of materials (dielectric, earth). His problem therefore can be solved either by treating all the arrangement core-sheath-ground as single electric system or, applying the rule of superposition of fields, by separate computing of waves in two separate systems: core-sheath and sheath-ground.

The author of this paper has chosen the second method as being more simple and as making possible the application of Thomson [7] and Sommerfeld [6] considerations. The author has taken into consideration as a starting point well known equivalent circuit with distributed constants for the cable-line (Fig. 2) with respective equations (Fig. 1, formulae 1—7) and well known equivalent circuit for the single-conductor (Figs. 3 and 4) with it equation (8).

Both circuits of the Fig. 2 and Fig. 4, corresponding to the separately excited systems: core sheath and sheat-ground, may be coupled taking into the account additional voltages, originated in both systems, along the internal and external surface of the sheath (equations 9 and 10), this leads to general Maksiejewski's circuit [4] (Figs. 3—5).

Maksiejewski's [4] computation of the impedance $Z_4 = j\omega L''$ being dependent on magnetic flux in earth, is based upon Carson's works [2]. The equations for Z_4 presented in this paper based on Sommerfeld's considerations [5], [6] and on immediate computation of this magnetic flux (Fig. 6, formulae 11 and 12).

The author has found out that the Π-circuit, proposed by Bogomolow [1] for a cable short-circuited at the end by an expulsion-gap (Fig. 9), is accordant to the simplified Maksiejewski's circuit (Fig. 8) based on the general circuit (Fig. 5). The circuit of the Fig. 10, being modification of the circuit of the Fig. 9, are as illustration for this accordance.

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI
TOM X ZESZYT 1 1961

621.316.99

H. KONCZYŃSKI

Ustalenie liczby oraz rozstawienia w terenie sztucznych uziomów wielokrotnych w zależności od czynników technicznych i ekonomicznych

Rękopis dostarczono 22. 4. 1960.

W artykule niniejszym rozpatrzono jedynie uziemienia wielokrotne złożone z prętów pionowych jako ekonomicznie, a w wielu przypadkach i technicznie najkorzystniejsze, między innymi również w telekomunikacji przewodowej [4]. Obliczeń oporności uziemień wielokrotnych dokonano dla gruntów jednorodnych w zależności od liczby uziomów, ich długości oraz wzajemnej odległości. Następnie sporządzono szereg wykresów oporności uziemień oraz procentowego współczynnika wykorzystania pojedynczych uziomów, jak też współczynnika dobroci uziemienia w zależności od liczby uziomów, ich długości oraz wzajemnej odległości. Na zakończenie przeprowadzono analizę otrzymanych wyników dla uziemień wielokrotnych uwzględniając czynnik ekonomiczny.

1. WSTĘP

Zagadnienie liczby i rozmieszczenia uziomów jest zagadnieniem trudnym zwłaszcza na terenie obiektów telekomunikacji przewodowej przede wszystkim dlatego, że teren urzędów telekomunikacyjnych jest gęsto zabudowany przez ciągi kabli silnoprądowych i teletechnicznych biegnących najczęściej w kilku kierunkach, podziemne zbiorniki benzyny dla elekrowni zapasowych, rury wodociągowe, kanalizacyjne, gazowe, grzejne, a czasem nawet odwadniające. W tym całym uzbrojeniu terenu muszą pomieścić się uziemienia nie tylko teletechniczno-energetyczne, ale i energetyczne wysokiego napięcia, a także piorunochronne, z których każde musi spełniać właściwe warunki przewidziane odpowiednimi normami lub przepisami. Ponieważ jednocześnie uziemienia wymagające niskiej oporności składają się dość często z szeregu uziomów połączonych równolegle, jest więc ważne ustalenie warunków, przy których skuteczność uziemienia byłaby jak najlepsza przy możliwie najmniejszej ilości uziomów oraz najmniejszej powierzchni zajętego terenu, wreszcie, przy możliwie niskich kosztach budowy.

Przed przystąpieniem do zasadniczych obliczeń zauważmy, że budowa uziemień wielokrotnych jest najbardziej odpowiednia przy uziomach pionowych prętowych lub rurowych [4]. Zachodzi jednak konieczność ścisłego określenia rozstawienia uziomów, gdyż skutkiem wzajemnego oddziaływania oporność poszczególnych N prętów tworzących uziemienie wielokrotne, a wynikająca ze wzoru na oporność wypadkową uziomów połączonych równolegle, jest zawsze większa niż $\frac{1}{N}$ część oporności pojedynczego pręta.

Co się tyczy współczynnika wykorzystania wyrażającego sprawność uziemienia wielokrotnego, to zależny on jest od długości uziomów, ich liczby oraz odległości między nimi i jest tym mniejszy im uziomy są bliżej siebie usytuowane, gdyż pola rozpływu prądu nakładają się na siebie. Dlatego więc zbyt gęste rozmieszczanie dużej liczby prętów nie zmniejsza praktycznie oporności uziemienia, natomiast na zbyt rozległe rozstawienie nie zezwala zazwyczaj wielkość terenu, który może być użyty do budowy uziemień. Aby wyznaczyć najkorzystniejsze technicznie i najekonomiczniejsze wielkości rozstawienia uziomów oraz wielkości potrzebnego terenu przeprowadzono szereg obliczeń.

2. OBLICZENIA OPORNOŚCI UZIEMIEŃ PIONOWYCH W GLEBACH JEDNORODNYCH

Obliczenia oporności do ziemi uziemień pionowych wykonanych z prętów pojedynczych i wielokrotnych o kilku długościach przeprowadziliśmy w zależności od ich rozstawienia w terenie, tzn. w zależności od wzajemnych odległości między prętami.

Obliczeń tych dokonano na podstawie wzorów podanych przez Dwighta [1]. Wzory te są oparte na obliczeniu średniego potencjału przy założeniu jednostajnej gęstości ładunku na powierzchni przewodnika i stąd znajdowaniu przybliżonej pojemności przez podzielenie całkowitego ładunku przez średni potencjał. Otóż wzory te są zupełnie wystarczające dla postawionych celów, gdyż błąd waha się w granicach od 3‰ do najwyżej jednego procentu dla drutów i prętów [1].

Należy zaznaczyć, że ze względu na normalnie odczuwaną szczupłość terenu w obiektach łączności przewodowej będą rozpatrzone tylko uziomy pionowe ułożone w szachownicę, gdyż przy dużej liczbie uziomów wszelkie ustawienia uziomów czy w rzędzie, czy też na zamkniętym obwodzie zajmują znacznie więcej miejsca. Należy tu dodać, że uziemienia teletechniczno-energetyczne są umieszczane dalej od budynku, przy czym teren przylegający do budynku w obiektach łączności jest zarezerwowany dla uziomów piorunochronnych połączonych z teletechniczno-energetycznymi uziomami jedynie za pomocą przewodów ułożonych

w ziemi [3]. Co się tyczy wielkości terenu do budowy uziemień wielokrotnych, to poza terenem potrzebnym na rozmieszczenie samych uziomów przewiduje się ze wszystkich stron tego terenu wolny pas ziemi o szerokości około 0,5 m. Ten wolny pas wprowadzono, aby przy budowie uziemień w obiektach łączności przewodowej zapobiec wątpliwościom i trudnościom związanym z budową uziemień teletechniczno-energetycznych.

Przy obliczeniach zastosowano następujące wzory:
Dla pojedynczego pręta wzór

$$R_p = \frac{\varrho}{2\pi L}\left(\log_e \frac{4L}{a} - 1\right) \tag{1}$$

gdzie L jest długością pręta w metrach, zaś $2a$ średnicą pręta w metrach.

Przy dwu prętach i odległości między nimi $s \leqslant L$ oblicza się oporność jednego pręta ze wzoru

$$R_p = \frac{\varrho}{2\pi L}\left(\log_e \frac{4L}{a} - 1\right) + \frac{\varrho}{2\pi L}\left(\log_e \frac{4L}{s} - 1 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4}\right) \tag{2}$$

a dla $s > L$ ze wzoru

$$R_p = \frac{\varrho}{2\pi L}\left(\log_e \frac{4L}{a} - 1\right) + \frac{\varrho}{2\pi s}\left(1 - \frac{L^2}{3s^2} + \frac{2}{5}\frac{L^4}{s^4}\right). \tag{3}$$

We wzorach tych pierwszy składnik stanowi oporność własną rozpatrywanego pręta, natomiast drugi składnik stanowi zwiększenie oporności wywołane przez drugi pręt.

Przy większej liczbie prętów musimy uwzględniać wpływy zwiększenia oporności wywołane przez każdy następny pręt. W tym celu sumuje się drugi składnik odpowiednią liczbę razy, uwzględniając dla każdego składnika odległość między prętem rozpatrywanym a prętem wywołującym zwiększenie oporności.

Aby rozważania oparte o wyniki obliczeń przeprowadzonych na podstawie omawianych wzorów, stanowiły jak najbardziej ogólne wytyczne uniezależnione od rodzaju gruntu, zakładamy we wszystkich obliczeniach niniejszego rozdziału, że stały mnożnik $\frac{\varrho}{2\pi} = 1$, co odpowiada według danych Centralnego Urzędu Geologii [8] przeciętnej oporności elektrycznej wody rzecznej.

Celem jeszcze bardziej wszechstronnych rozważań dokonano obliczeń dla trzech długości prętów pionowych: $L = 3, 10$ i 20 metrów. Średnicę prętów przyjęto w każdym przypadku równą 2 cm, gdyż wpływ średnic możliwych do zastosowania w praktyce jest niewielki.

W y n i k i o b l i c z e ń.

Wyniki przeprowadzonych obliczeń zestawiono w tablicy 1 do 6.

1. Oporność do ziemi od jednego pręta obliczono ze wzoru (1) podanego powyżej, a wyniki zestawiono w tablicy 1, przy czym R_p oznacza

Tablica 1

L metrów	3	10	20	40
R_p omów	2,03	0,73	0,399	0,217
P m²	0,785			

oporność pręta do ziemi, zaś P — powierzchnię zajętą przez to uziemienie (licząc powierzchnię koła o promieniu 0,5 m, zgodnie z zasadą przyjętą wyżej).

2. Oporność do ziemi od dwu prętów obliczyliśmy ze wzorów (2) i (3) przy czym s oznacza odległość między prętami, zaś R_c oporność do ziemi całego urządzenia złożonego z dwu równoległych prętów pionowych. Inne oznaczenia są takie same, jak w punkcie 1. Wyniki obliczeń podano w tablicy 2.

Tablica 2

	$L=3$ m		$L=10$ m		$L=20$ m		
s m	R_p Ω	R_c Ω	R_p Ω	R_c Ω	R_p Ω	R_c Ω	P m²
0,02	3,830	1,91	1,390	0,695	0,764	0,382	0,825
0,3	2,940	1,47	1,120	0,560	0,629	0,314	0,875
0,5	2,787	1,39	1,070	0,535	0,603	0,301	1,285
1	2,580	1,29	0,994	0,497	0,569	0,284	1,785
2	2,395	1,19	0,940	0,470	0,535	0,267	2,785
3	2,306	1,15	0,904	0,452	0,516	0,258	3,785
5	2,216	1,10	0,860	0,430	0,489	0,244	5,785
7	2,166	1,08	0,835	0,418	0,479	0,239	7,785
10	2,127	1,06	0,813	0,406	0,459	0,229	10,785
15	2,096	1,04	0,790	0,395	0,450	0,225	15,785
25	2,07	1,035	0,770	0,385	0,437	0,218	25,785
40	2,055	1,027	0,750	0,375	0,422	0,211	40,785

3. Oporność do ziemi od czterech prętów ustawionych w kwadrat obliczono ze wzorów (2) i (3), sumując drugi składnik 3 razy (dla 3 prętów) i podstawiając odpowiednie wielkości dla s.

Tablica 3

	$L=3$ m		$L=10$ m		$L=20$ m		
s m	R_p Ω	R_c Ω	R_p Ω	R_c Ω	R_p Ω	R_c Ω	P m²
0,02	5,895	1,474	2,67	0,67	1,476	0,369	2,06
0,5	4,55	1,14	1,72	0,43	0,994	0,248	2,25
1	3,58	0,89	1,50	0,375	0,892	0,223	4
2	3,045	0,76	1,33	0,33	0,791	0,198	9
3	2,79	0,697	1,222	0,305	0,729	0,182	16
5	2,537	0,634	1,095	0,274	0,657	0,164	36
7	2,40	0,60	1,023	0,256	0,624	0,156	64
10	2,29	0,57	1,007	0,252	0,572	0,143	121
15	2,21	0,55	0,96	0,24	0,542	0,135	256
25	2,138	0,534	0,834	0,208	0,501	0,125	676
40	2,097	0,524	0,796	0,199	0,461	0,115	1681

4. Oporność do ziemi od 9 prętów ustawionych w szachownicę na powierzchni kwadratowej oblicza się na podstawie takich samych wzorów jak w punkcie 3, sumując dodatkowo wpływy od następnych prętów. W tym przypadku ma się do czynienia z prętami podlegającymi wpły-

Tablica 4

	$L=3$ m		$L=10$ m		$L=20$ m		
s m	R_p Ω	R_c Ω	R_p Ω	R_c Ω	R_p Ω	R_c Ω	P m²
0,5	7,133	0,748	3,330	0,415	1,817	0,202	4
1	5,19	0,577	2,496	0,277	1,549	0,172	9
2	4,05	0,450	2,030	0,230	1,287	0,143	25
3	3,52	0,390	1,769	0,196	1,148	0,127	49
5	2,976	0,331	1,474	0,164	0,963	0,107	121
7	2,719	0,302	1,313	0,146	0,867	0,096	225
10	2,516	0,280	1,229	0,136	0,748	0,083	441
15	2,356	0,260	1,106	0,123	0,680	0,076	961
25	2,227	0,247	0,923	0,103	0,586	0,065	2601
40	2,153	0,239	0,852	0,095	0,516	0,057	6561

wom o różnym nasileniu, a mianowicie: pręty w środku boków kwadratu będą posiadały oporność nieco większą (według obliczeń około 105%, środkowy zaś pręt największą 109%). Wobec tego średnia oporność jednego pręta wzrośnie do około 103%. Ostateczne wyniki obliczeń umieszczono w tablicy 4.

5. Oporność do ziemi od 16 prętów ustawionych w szachownicę obliczono na podstawie wzorów i według zasad poprzednio podanych. Zestawienie obliczeń podano w tablicy 5.

6. Oporność do ziemi dla 25 prętów po przeprowadzeniu obliczeń podano w tablicy 6.

Tablica 5

	$L=3$ m		$L=10$ m		$L=20$ m		
s m	R_p Ω	R_c Ω	R_p Ω	R_c Ω	R_p Ω	R_c Ω	P m²
0,5	9,95	0,62	4,591	0,287	2,820	0,171	6,25
1	6,94	0,43	3,619	0,226	2,335	0,146	16
2	5,04	0,31	2,782	0,174	1,857	0,116	49
3	4,20	0,26	2,339	0,146	1,641	0,102	100
5	3,39	0,21	1,864	0,116	1,283	0,080	256
7	3,01	0,19	1,596	0,099	1,160	0,072	484
10	2,72	0,17	1,434	0,089	0,943	0,059	961
15	2,49	0,16	1,241	0,078	0,813	0,051	2116
25	2,31	0,14	0,996	0,062	0,668	0,042	5776
40	2,21	0,13	0,904	0,056	0,568	0,035	14641

Tablica 6

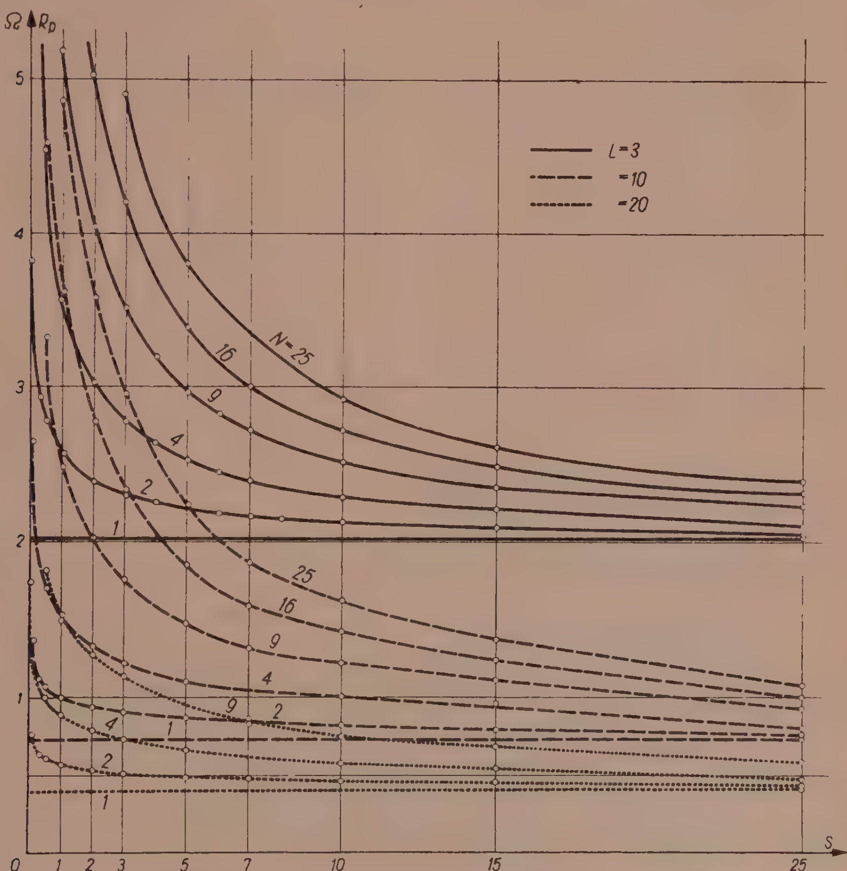
	$L=3$ m		$L=10$ m		$L=20$ m		
s m	R_p Ω	R_c Ω	R_p Ω	R_c Ω	R_c Ω	R_p Ω	P m²
0,5	12,994	0,520	6,394	0,255	4,004	0,161	9
1	8,828	0,353	4,876	0.195	3,237	0,129	25
2	6,012	0,240	3,585	0,143	2,486	0,099	81
3	4,857	0,194	2,971	0,118	2,129	0,085	169
5	3,788	0,151	2,243	0,089	1,689	0,067	441
7	3,295	0,132	1,874	0,075	1,426	0,057	841
10	2,917	0,117	1,630	0,065	1,133	0,045	1681
15	2,623	0,105	1,373	0,055	0,942	0,037	3721
25	2,391	0,096	1,076	0,043	0,747	0,029	10201
40	2,256	0,090			0,617	0,025	25921

3. ANALIZA WYNIKÓW OBLICZEŃ

Celem przeprowadzenia analizy obliczeń sporządzono na ich podstawie szereg wykresów dla uziemień wielokrotnych umieszczonych w gruntach jednorodnych. Wykresy te dają zależności oporności uziemień wielokrot-

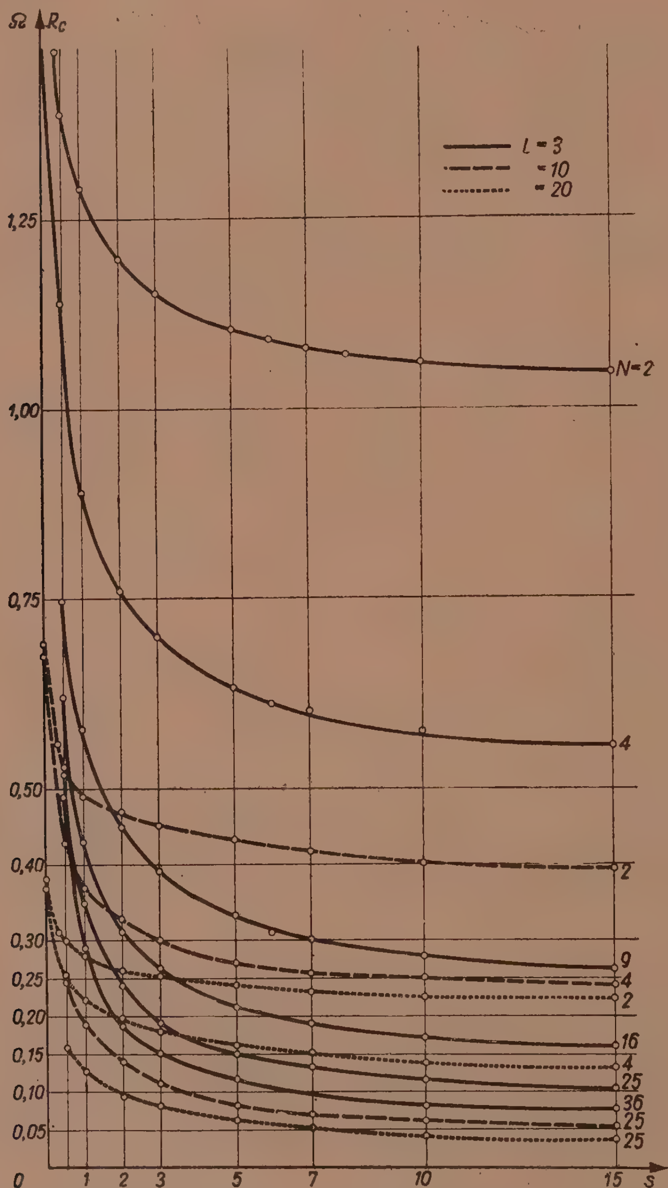
nych od długości prętów, ich liczby oraz rozstawienia w terenie. Nie wzięto jednak pod uwagę (podobnie jak i w obliczeniach) przewodności gruntu, gdyż interesuje nas w pierwszym rzędzie charakter otrzymanych krzywych. Oczywiste, że dla warunków rzeczywistych należy wprowadzać czynnik $k = \frac{\varrho}{2\pi} \neq 1$ (zazwyczaj większy od 1), który — jak widać z poprzednio podanych równań — wpływa jedynie na przesunięcie odpowiedniej krzywej ku górze oraz na zwiększenie jej promienia krzywizny proporcjonalnie do zwiększenia czynnika k, bez zmiany jednak charakteru krzywej. Obrazuje to wyraźnie dołączony dodatkowo rys. 10 sporządzony dla R_c w skali logarytmicznej.

Przy wyciąganiu wniosków wzięto jednocześnie pod uwagę przewidywany koszt budowy uziemień uzależniając do pewnego stopnia w ten sposób polepszenie warunków technicznych od czynników ekonomicznych,



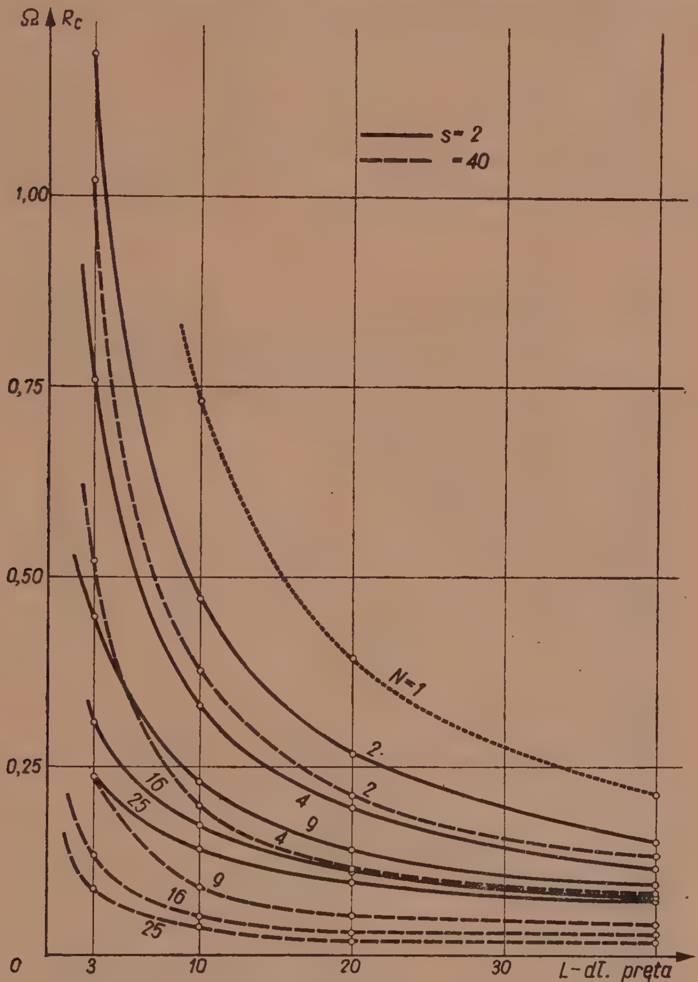
Rys. 1. Oporność pojedynczego pręta w zależności od odległości s jego od innych prętów dla różnych prętów N i różnej ich długości.

co właśnie daje w wyniku realny postęp techniczny. Przy uwzględnianiu czynników ekonomicznych oparto się na wynikach poprzedniego artykułu [4]. Przyjęto przy tym, że koszt uziemienia (obliczony według zasad podanych w poprzednim artykule, tj. bez doprowadzeń i innych robót



Rys. 2. Oporność całego urządzenia w funkcji odległości s między prętami dla różnej ilości prętów N i dla trzech długości prętów.

dodatkowych) jest w przybliżeniu proporcjonalny do ilości uziomów. Uwzględniono wreszcie wielkość powierzchni gruntu zajętego przez uziemienie, co również stanowi ważny czynnik ekonomiczny, zwłaszcza w przypadku uziemień stacyjnych w obiektach łączności przewodowej. Nie przeprowadzono jednak ścisłej kalkulacji kosztów uziemienia w funk-



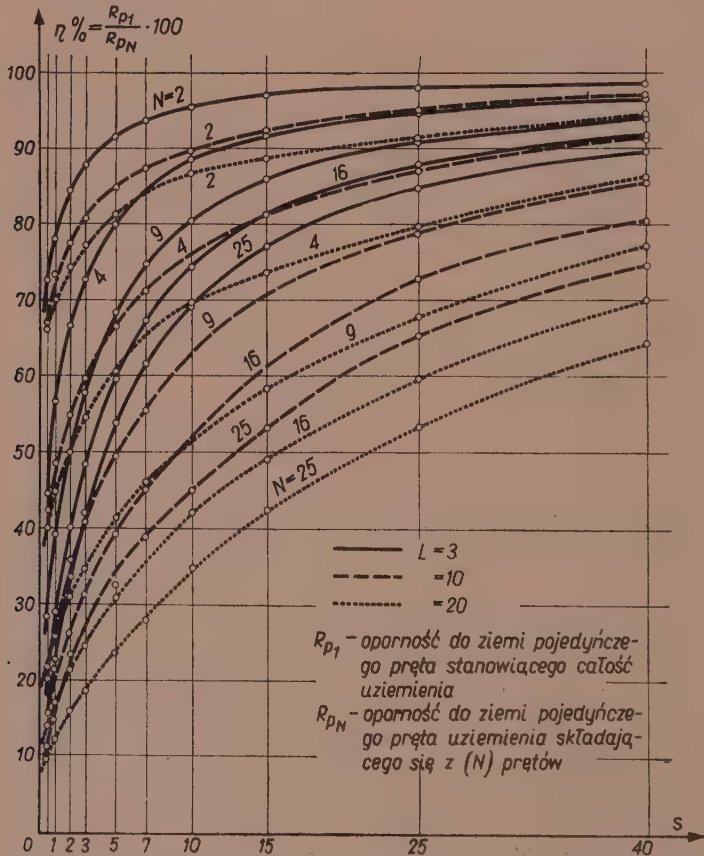
Rys. 3. Oporność całego urządzenia w zależności od długości prętów dla różnych ich ilości N.
Uwaga! Dla każdej ilości prętów podano dwie oporności

cji kosztów zajętego na uziemienie terenu ze względu na obecny brak gospodarczo uzasadnionych cen gruntów, zwłaszcza w okręgach miejskich.

Z załączonych wykresów można wyczytać szereg ciekawych wniosków ogólnych, a między innymi:

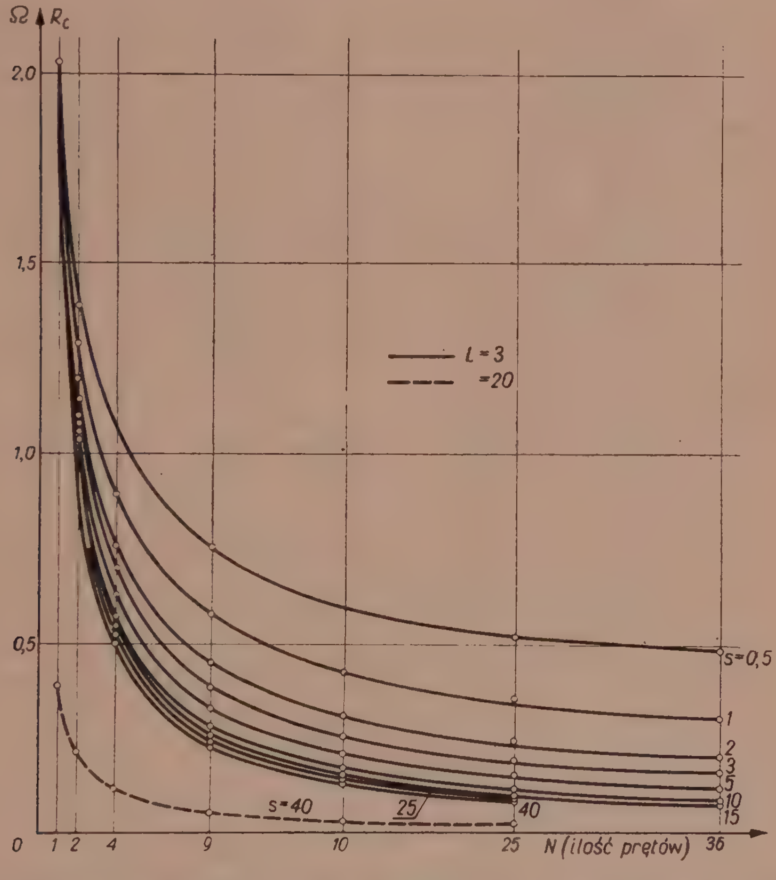
1. Oporność całego urządzenia uziemiającego coraz wolniej maleje ze

wzrostem odległości między uziomami s (rys. 2), jak również ze zwiększeniem długości L pionowych prętów uziomowych (rys. 3). Prócz tego widać, że obydwie te cechy występują tym prędzej, im ilość uziomów jest większa (rys. 2 i 3). Z tych samych wykresów widać, że im dłuższe pręty, tym przy zwiększaniu odległości między nimi następuje szybciej ustalanie się oporności całego urządzenia (przegięcie krzywych) i zaczyna się już tylko powolne polepszanie. Niesłuszne więc byłoby zwiększanie odległości między prętami ponad pewną wielkość, a co najciekawsze, że wielkość ta nie powinna być w praktyce tak bardzo zależna od długości prętów jak to utarło się stosować. Wprawdzie współczynnik wykorzystania poszczególnych prętów, jak widać z rys. 4, jest tym mniejszy, im



Rys. 4. Procentowy współczynnik wykorzystania pojedynczych prętów w zależności od odstępów między prętami dla różnej ilości prętów N.
Oznaczenia: R_{p_1} — oporność do ziemi pojedynczego pręta stanowiącego całość uziemienia
R_{p_N} — oporność do ziemi pojedynczego pręta uziemienia składającego się z N prętów.

pręty dłuższe, ale jednocześnie należy spostrzegać, że właśnie im dłuższe pręty, tym współczynnik ten polepsza się wolniej w miarę zwiększania odległości s. Skutkiem tego niewielkie nawet polepszenie współczynnika wykorzystania pojedynczych prętów wymagałoby bardzo znacznego powiększenia powierzchni przeznaczonej na uziemienie, a to obniża pośrednio czynnik ekonomiczny i stwarza dodatkowe trudności techniczne w obiek-



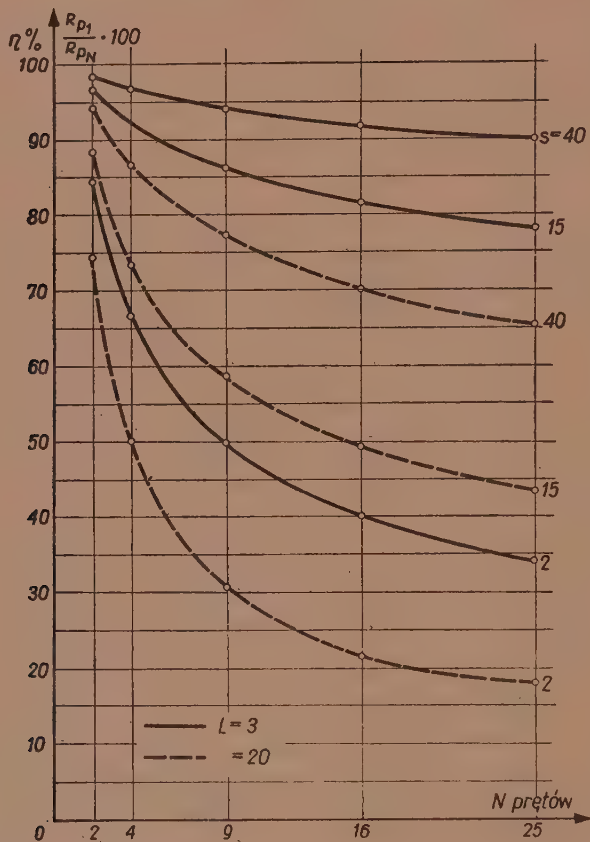
Rys. 5. Zależność całkowitej oporności uziemienia od ilości prętów przy różnych odległościach między prętami przy $L=3$ m oraz jedna krzywa dla $L=20$ m.

tach łączności przewodowej. Dlatego nie jest uzasadnione zwiększanie odległości między prętami ze zwiększaniem długości uziomów. Zreszta, jakkolwiek działanie na siebie prętów długich zachodzi na większej długości, jednak również rozpływ prądu (przy prętach długich) rozkłada się na większy obszar gruntu, a więc oddziaływanie poszczególnych jednostek długości prętów długich będzie słabsze.

Co się tyczy obniżenia oporności całego uziemienia wskutek wpływu

drutów poziomych łączących pręty pionowe, to jakkolwiek wpływ ten jest tym większy, im rozstawienie prętów pionowych jest większe, jednak wpływ ten jest praktycznie niezależny od długości prętów.

Mimo więc, że zwyczaj stosowania odległości między prętami odpowiednio do długości uziomów, lub nawet jej wielokrotności [9 str. 19] [6. cz 1 str. 315] polepsza współczynnik wykorzystania uziomów, jednak

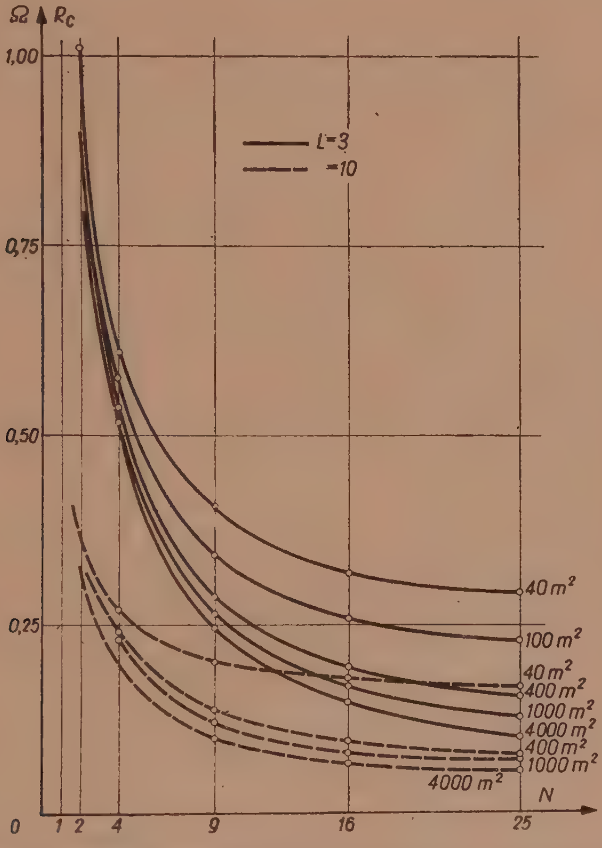


Rys. 6. Procentowy współczynnik wykorzystania pojedynczych prętów w zależności od ilości prętów dla różnych odstępów między prętami.

ze względu na niezbyt szybkie polepszanie (i tylko nieznacznie lepsze niż przy prętach krótszych) nie jest ono ekonomiczne ze względu na oszczędność powierzchni gruntu występującej jaskrawo na posesjach zajmowanych przez obiekty łączności. Jakkolwiek więc zwyczaj ten można by może częściowo usprawiedliwić dla uziemień budowanych wzdłuż linii, gdzie nie zawsze wchodzi w rachubę ograniczoność przestrzeni ziemi, jednak i wówczas zwyczaj ten jest mało uzasadniony, gdy niewiele

(2, 3, 4) jest uziomów wielokrotnych (co często zachodzi w praktyce), gdyż w tych przypadkach współczynnik wykorzystania uziomów praktycznie ustala się przy zbliżonych odległościach *s* niezależnie od długości uziomów (przegięcie krzywych), a dalej polepsza się coraz wolniej (rys. 4 i rys. 11).

2. Poza powyższymi wnioskami należy jeszcze zauważyć, że dla każdej odległości między prętami oporność całego urządzenia uziemiającego

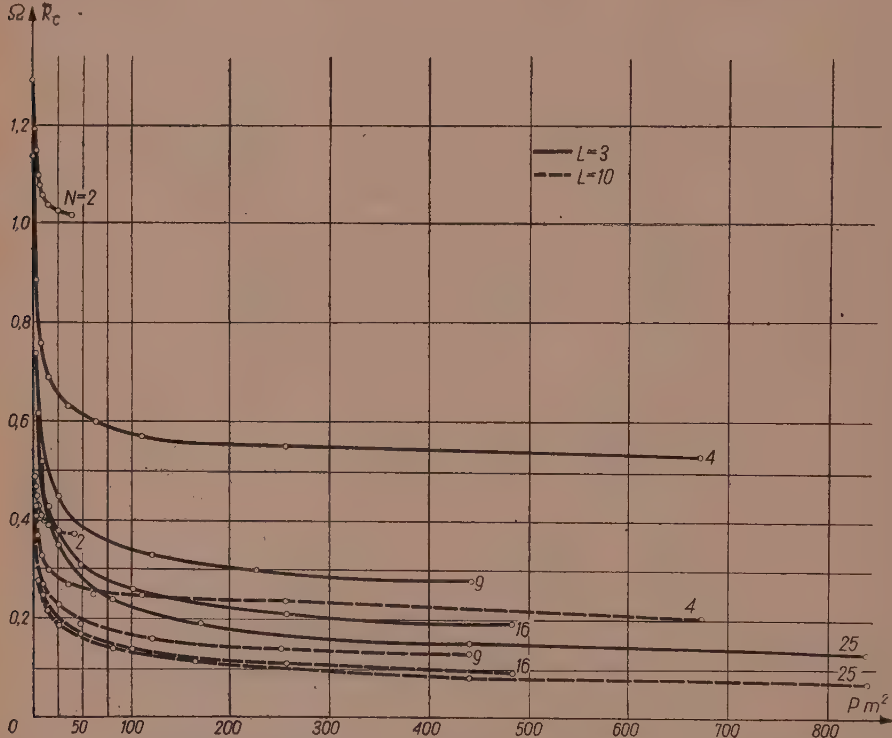


Rys. 7. Zależność oporności uziemienia od ilości prętów przy różnej powierzchni przeznaczonej na budowę uziemienia.

coraz wolniej maleje przy zwiększaniu ilości prętów (rys. 5), co dało się spostrzec z wykresów (rys. 2 i 3).

Co się tyczy współczynnika wykorzystania prętów w zależności od ich liczby, to obniża się on wraz ze zwiększeniem liczby prętów (rys. 6) nawet przy zachowaniu tej samej odległości między prętami, a więc przy jednoczesnym zwiększaniu powierzchni gruntu przeznaczonego na uziemienie. Nie przynosi więc wyraźnych korzyści powiększanie liczby prętów ponad pewną liczbę różną dla każdej odległości między prętami. Ta korzystna

liczba prętów jest przy tym tym większa, im oporność gruntu jest większa (wynika to z występowania czynnika ϱ w równaniach (1), (2), (3). Tym bardziej nie przynosi korzyści powiększanie liczby prętów przy określonej powierzchni gruntu przeznaczonego na budowę uziemienia (rys. 7). Również zbyt duże powiększanie odległości między prętami, a więc powiększanie powierzchni przeznaczonej na budowę uziemienia przy okre-

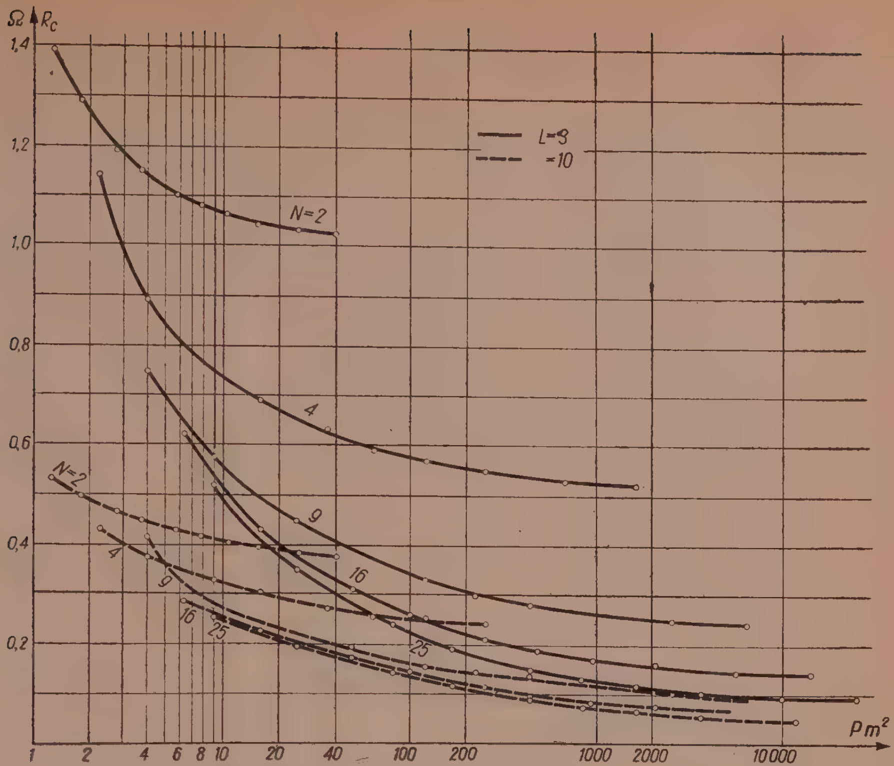


Rys. 8a. Zależność oporności całego uziemienia od powierzchni przeznaczonej na jego budowę, dla różnych ilości N prętów.

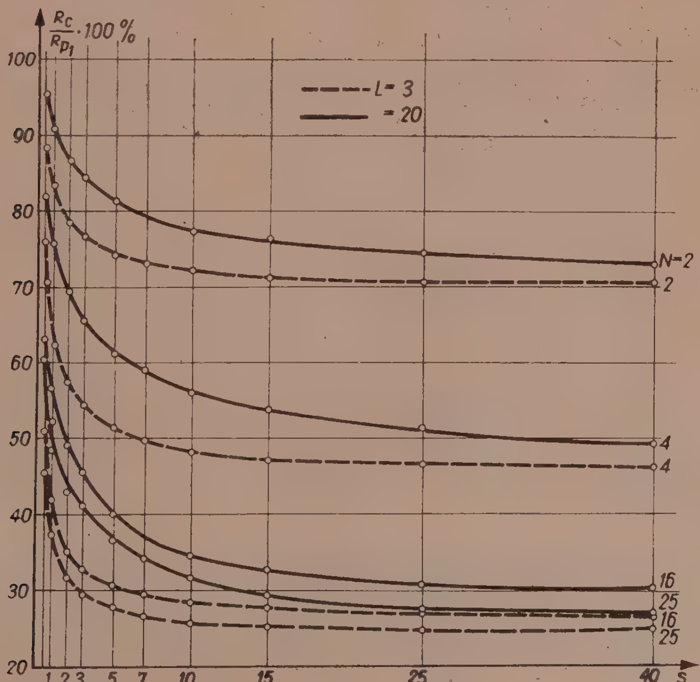
ślonej liczbie prętów nie daje wyraźnych korzyści, widać to z rys. 8a. Jeszcze lepiej widać to z rys. 8b, gdzie powierzchnię zajętą podano w skali logarytmicznej.

Na to samo wreszcie wskazuje stosunek oporności całego urządzenia uziemiającego do oporności uziomu stanowiącego pojedynczy pręt (rys. 9). Mianowicie, przy zwiększaniu odległości między prętami stosunek ten praktycznie ustala się przy pewnej niezbyt nawet dużej odległości między prętami. Trzeba jednak dodać, że to ustalanie się jest nieco powolniejsze przy większej długości prętów.

Na zakończenie należy zauważyć, że nawet przy zwiększaniu liczby prętów i jednoczesnym zwiększaniu obszaru zajętego przez uziemienie,



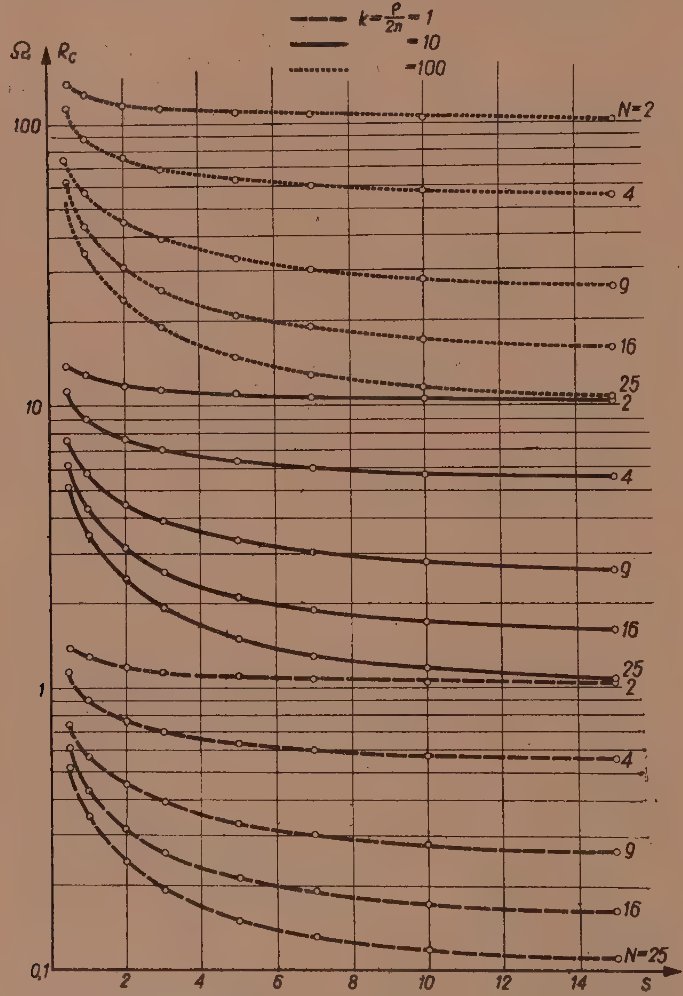
Rys. 8b. Zależność oporności uziemienia od powierzchni przeznaczonej na jego budowę dla różnych ilości prętów N.



Rys. 9. Stosunek oporności całego urządzenia uziemiającego do oporności pojedynczego pręta wyrażony w %, dla kilku ilości N.

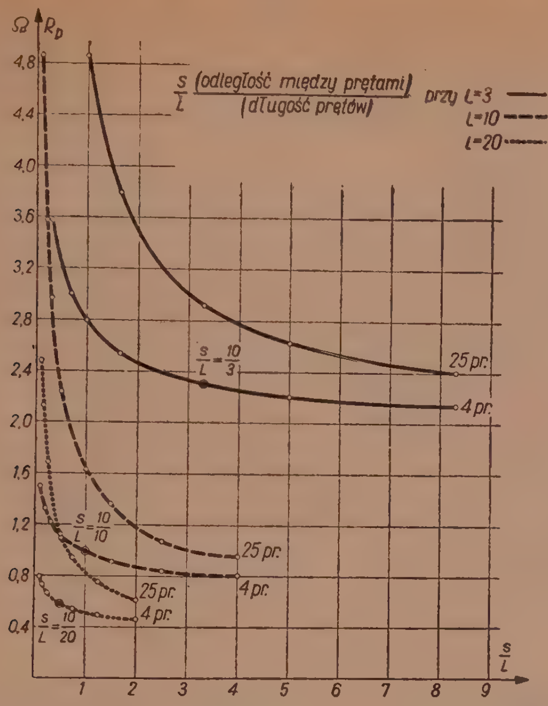
co odpowiada powiększaniu odległości s również coraz słabiej zmniejsza się oporność uziemienia w miarę powiększania tych wielkości, a więc ustala się asymptotycznie najniższa możliwa praktycznie do uzyskania oporność przy danym ϱ (rys. 5).

Wynika stąd ostatecznie, że dla każdego gruntu (różne ϱ) istnieje



Rys. 10. Oporność całego urządzenia w funkcji odległości między prętami dla $L=3$ m, dla różnej ilości prętów N.

praktycznie pewna graniczna powierzchnia, której przeznaczenie na budowę uziemienia może być umotywowane technicznie i ekonomicznie. Dalsze zwiększanie powierzchni, jak również liczby uziomów nie przynosi praktycznie wyraźnego zmniejszenia oporności uziemienia, a zwiększa



Rys. 11. Zależność oporności poszczególnych prętów przy uziemieniach wielokrotnych od stosunku $\frac{s}{L}$ $\frac{(odległość\ między\ prętami)}{(długość\ prętów)}$

niewspółmiernie koszty zarówno bezpośrednie dotyczące materiałów i robocizny, jak też pośrednie wynikające ze zwiększenia powierzchni gruntu zajętego na uziemienie.

Instytut Łączności

WYKAZ LITERATURY

1. D w i g h t H. B.: *Calculation of resistances to ground.* Transactions A I E E Vol. 55 s. 1919. 1936.
2. H a l l e n E.: *Lösung zweier Potentialprobleme der Elektrostatik.* Arkiv for Matematik och Fysik V 21. 1929.
3. K o n c z y ń s k i H.: *Możliwości zastosowania wspólnych uziemień w urządzeniach telekomunikacji przewodowej oraz instalacji siły i światła.* I. Ł. 1959. Nr II — 105.
4. K o n c z y ń s k i H.: *Zagadnienie typu i wielkości uziomów sztucznych w zależności od czynników technicznych i ekonomicznych.* Arch. El. t. IX z. 2 1960.
5. R y ż k o St.: *Podstawy ochrony budowli przed piorunami.* PWN 1959.
6. S z p o r St.: *Ochrona odgromowa.* PWT Warszawa 1953.

7. Thielers M.: *The earthing problem particularly in its application to telephony.* L. M. Ericsson.
8. Centralny Urząd Geologii Instytut Geologiczny Nr PG 340-c/58 1958.
9. Telegraphenbauordnung Teil 16.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА И РАЗМЕЩЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ МНОГОКРАТНЫХ ЗАЗЕМЛЕНИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

В настоящей статье рассмотрены многократные заземления, составленные исключительно из вертикальных штанг, так как они являются наиболее экономичными, а в большинстве случаев также и наиболее выгодными в техническом отношении, в особенности для проводной связи (4). Сопротивление многократных заземлений вычислено для однородных грунтов в зависимости от количества штанг, их длины и расстояния между ними. Далее вычерчен ряд графиков сопротивления заземлений и коэффициента процентного использования одиночной штанги заземления, а также коэффициента доброкачественности заземления в зависимости от количества штанг, их длины и расстояния между ними.

В заключение проведен анализ полученных для многократных заземлений результатов с учетом экономического фактора.

DETERMINATION IN NUMBER AND DISTRIBUTION IN AREA OF ARTIFICIAL MULTIPLE EARTHING ELECTRODES DEPENDING ON TECHNICAL AND ECONOMICAL FACTORS

The paper is solely concerned with the examination of the multiple earthing electrodes consisting of vertical bars being most favourable for earthing in wire telecommunication units [4].

The resistances of the multiple electrodes earthed in homogeneous soil are evaluated with respect to the number of earthings, their lengths and spacing.

A number of graphs representing the resistances of earthing, percentage utilization factor and earthing quality factor in function of the number of earthings, their lengths and spacing are drawn.

Finally an analysis of the results obtained for the multiple earthing electrodes with respect to the technical and economical factor is carried out.

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI
TOM X ZESZYT 1 1961

621.313.33:621.317.38

J. OWCZAREK

Dokładny pomiar mocy pobranej przez silnik miniaturowy z zastosowaniem kompensatora w układzie współrzędnych prostokątnych

Rękopis dostarczono 20. 2. 1960 r.

W artykule omówiono stosowane dotychczas metody pomiaru mocy pobranej przez silnik miniaturowy *. Stwierdzono ich wady przy pomiarach tego rodzaju maszyn prądu zmiennego i zaproponowano oryginalny układ z wykorzystaniem kompensatora Geygera, wolny od wad dotychczas stosowanych metod. Rozważania teoretyczne uzupełniono podstawowymi założeniami do budowy przyrządu opartego na opracowanym układzie a charakteryzującego się dużą uniwersalnością i prostotą obsługi. Przyrząd nadaje się szczególnie do spełniania specyficznych wymagań występujących przy badaniach maszyn elektrycznych.

1. WSTĘP

Coraz szersze rozpowszechnienie maszyn miniaturowych powoduje stosowanie wielu ich odmian konstrukcyjnych o rozmaitych właściwościach. Dla ustalenia przydatności danego typu lub egzemplarza silnika miniaturowego do stawianych mu wymagań oraz określenia charakterystyk układu, w którym będzie on pracował, niezbędna jest dokładna znajomość jego parametrów eksploatacyjnych. Wykorzystywanie w tym celu danych obliczeniowych mija się z celem, gdyż mogą być one zawsze tylko przybliżone wskutek konieczności stosowania uproszczeń przy przeliczeniach i wskutek wpływu przyczyn technologicznych. Obydwa te czynniki powodują znaczne rozbieżności charakterystyk obliczeniowych i rzeczywistych. Zjawisko to występuje szczególnie wyraźnie w przypadku maszyn miniaturowych. Z drugiej strony miniaturowe silniki elektryczne na ogół nie mogą być badane przy użyciu normalnie stosowanych metod pomiarowych, gdyż w tym przypadku moc pobierana przez układ pomia-

* Nazwę „silnik miniaturowy" przyjęto dla określenia silników o mocach mniejszych od 100 W. Silniki takie, zwane w literaturze angielskiej „micromotors", rosyjskiej — „mikrodwigateli", niemieckiej — „Mikromotoren" nie zostały nazwane po polsku analogicznie „mikrosilnikami" aby uniknąć nie zalecanego łączenia słów pochodzenia polskiego i obcego.

rowy jest zazwyczaj współmierna z mocą badanego silnika, co zmienia zasadniczo warunki jego pracy.

Staje się więc niezbędne opracowanie metod pomiarowych pozwalających na uzyskanie wystarczająco dokładnych wyników pomiarów poszczególnych parametrów wykonanych maszyn miniaturowych. Takie wyniki mogłyby nie tylko precyzyjnie scharakteryzować dany silnik, lecz również stanowić kryterium oceny przydatności i dokładności zastosowanej metody obliczania lub poszczególnych jej wzorów.

Jednym z podstawowych pomiarów charakteryzujących dany silnik jest pomiar mocy pobieranej. W niniejszym artykule pokrótce omówiono stosowane metody pomiaru mocy opisane w literaturze, przeanalizowano metodę nie posiadająca ich podstawowych wad i zaproponowano rozwiązanie przyrządu do dokładnego pomiaru mocy pobranej, opartego na jednej z modyfikacji przeanalizowanej metody.

2. STOSOWANE METODY POMIARU

W dotychczasowej praktyce pomiarowej dla określenia mocy pobranej przez małe silniki elektryczne stosowane są, jak wynika z danych zaczerpniętych z literatury, następujące metody: klasyczna — z zastosowaniem amperomierza, woltomierza i watomierza (ewentualnie elektronicznego); za pomocą amperomierza — z zastosowaniem zmiennej lub stałej pojemności dodatkowej; oscyloskopowa i z zastosowaniem wzmacniacza-przesuwnika fazowego.

W przypadku pomiaru mocy pobranej przez silnik prądu stałego, z układu pomiarowego klasycznej metody można wyeliminować watomierz. Jeżeli ponadto jako amperomierza i woltomierza użyjemy przyrządów magneto-elektrycznych odpowiednio wysokiej klasy, to w większości przypadków zużycie własne mocy przez układ pomiarowy można będzie pominąć wobec mocy mierzonej. Praktycznie pomiary mocy pobranej do rzędu ułamków wata można wykonywać bez uwzględnienia poprawek, otrzymując wyniki o dokładności określonej klasą zastosowanych mierników. Obliczenie ewentualnej poprawki dla takiego układu przyrządów pomiarowych jest również nadzwyczaj proste.

Dla prądu zmiennego klasyczna metoda dyskutowana jest w [1, 13 i 14]. Z 18 możliwych układów połączeń w pracach [1 i 14] wybrano po dwa — jako najkorzystniejsze. Z kolei po jednym z nich określono jako nadające się bez stosowania poprawek do silników o mocach powyżej około 120 W. W przypadku stosowania tych układów o minimalnym poborze własnym zestawionych z przyrządów odpowiadających podanym wymaganiom osiąga się dokładność pomiarów rzędu $\pm(1{,}5 \div 2\%)$.

Podana w przypadku tych układów minimalna moc $\sim$ 120 W jest za

duża w stosunku do zakresu mocy rozpatrywanych w niniejszej pracy silników miniaturowych.

Dla interesujących nas mniejszych mocy przeznaczone są pozostałe dwa układy, dobrane z uwzględnieniem łatwości wyprowadzenia wzorów na poprawki, uwzględniające pobór mocy przez przyrządy. Najwięcej mocy pobierają z układu watomierze. Na przykład, jeden z najlepszych typów watomierzy tradycyjnej konstrukcji do pomiaru małych mocy szwajcarskiej firmy Trüb Tauber pobiera z układu od 25 do 50% mocy mierzonej przy zakresach 3,75 i 7,5 W. Celem możliwego zmniejszenia tego poboru można stosować specjalne konstrukcje watomierzy. Dwie z nich opisane są w [1]. Jeden watomierz wykonano jako konstrukcję odwróconą — o stałej cewce prądowej i ruchomej napięciowej. Pobór mocy własnej zmniejszył się, ale przy najmniejszych silnikach nie może być jednak pomijany. Drugi watomierz wykonano z elektronicznym układem pomiarowym. Ma on znikomy własny pobór mocy, lecz uchyb $2 \div 3\%$; ponadto wymaga cechowania przed każdym pomiarem za pomocą specjalnego wzorca i nie eliminuje oczywiście poprawek uwzględniających własne zużycie mocy przez pozostałe przyrządy układu pomiarowego. W [14] wspomniano również o metodach odwróconego włączania watomierza i rozszerzenia zakresu pomiarowego posiadanego watomierza w kierunku mniejszych wartości prądów przez specjalny dobór przekładnika prądowego. Obie te metody prowadzą jednakże do pewnego zwiększenia własnego poboru mocy, który musi być następnie uwzględniony w poprawkach.

Podstawową trudnością występującą przy stosowaniu klasycznej metody jest brak seryjnie produkowanych watomierzy z obwodami prądowymi na odpowiednio małe prądy, pozwalających na wystarczająco dokładne pomiary przy zmianach $\cos \varphi$ w szerokich granicach, jak to ma miejsce podczas badań silnika w pełnym zakresie jego pracy od stanu jałowego do zwarcia.

Przy obliczaniu poprawek nieuniknionych przy stosowaniu metody klasycznej do pomiarów silników miniaturowych, poza stosunkowo żmudnymi przeliczeniami modułów nieznanych wielkości, konieczne jest uwzględnienie ich przesunięć kątowych, zależnych zarówno od występującego podczas pomiaru współczynnika mocy silnika $\cos \varphi$ jak i od uchybów kątowych wprowadzanych przez przyrządy pomiarowe. Nieuwzględnienie uchybu kątowego może już przy $\cos \varphi = 0{,}5$ spowodować około 19-krotny wzrost uchybu pomiaru [14]. Uwzględnianie poprawek kątowych wymaga stosowania pewnych uproszczeń, współczynników korekcyjnych, a czasem metody kolejnych przybliżeń; utrudnia to poważnie obliczenie poprawki uwzględniającej wpływ układu pomiarowego i zmniejsza jego dokładność.

Pomimo znacznego skomplikowania w przypadku pomiaru mocy silników miniaturowych klasyczna metoda nie może zapewnić zmniejszenia uchybu pomiaru poniżej $\pm(1{,}5 \div 2\%)$ nawet przy stosowaniu najdokładniejszych mierników.

Metoda pomiaru mocy pobieranej przez silnik miniaturowy za pomocą amperomierza przy zastosowaniu pomocniczej pojemności jest omawiana w [1, 9, 12, 13 i 14]. Opiera się ona na zasadzie kompensacji składowej indukcyjnej prądu obciążenia za pomocą składowej pojemnościowej wytworzonej dodatkowym kondensatorem. Z wykresu wektorowego układu wynika, że minimalna wartość prądu wskazywanego przez amperomierz przy zmianie pojemności dodatkowego kondensatora odpowiada prądowi czynnemu pobieranemu przez mierzony obiekt.

Modyfikacje metody polegają na zastąpieniu kondensatora o zmiennej pojemności baterią kolejno włączanych kondensatorów o stałych pojemnościach lub zastosowaniu jednego kondensatora o stałej pojemności, przy czym niezbędne jest wykonanie pewnych dodatkowych obliczeń i ewentualnie konstrukcji wykreślnych.

Pomiar mocy za pomocą amperomierza i dodatkowych kondensatorów nadaje się lepiej do pomiarów przy wyższych częstotliwościach. Przy interesującej nas przede wszystkim częstotliwości przemysłowej (50 Hz) wymiary kondensatorów wzrastają, a ponadto występują poważne trudności z uzyskaniem odpowiedniej ich dokładności i spełnieniem dodatkowych wymagań co do stratności. W [12] podano szereg warunków, które powinny spełniać kondensatory, i zasadę obliczania poprawek uchybów spowodowanych ich stratnością. Ze względu na trudności doboru a nawet specjalnego wykonania odpowiednio dokładnych i wykazujących małe stratności kondensatorów, stosując tę metodę nie można spodziewać się uchybu pomiaru mniejszego od kilku procent, mimo użycia mierników wysokiej klasy dokładności.

Oscyloskopowa metoda pomiarów mocy pobranej miniaturowych silników omówiona w [1] jest nadzwyczaj prosta, jednakże może być traktowana jedynie jako dająca orientacyjne wyniki, zarówno ze względu na małą dokładność samego oscyloskopu, jak i odczytu wymiarów osi otrzymanej na ekranie figury Lissajou. W przypadku stosowania tej metody należy liczyć się z uchybem pomiaru rzędu kilku, a nawet kilkunastu procent.

Metoda pomiaru mocy pobranej z zastosowaniem wzmacniacza-przesuwnika fazowego [7] wzmianki o której znajdują się w [2 i 11] ogranicza pobór mocy klasycznego układu woltomierza, amperomierza i watomierza i zmniejsza konieczne poprawki. Jednocześnie wprowadza ona jednak uchyby samego przesuwnika — specjalnego przyrządu elektronicznego o skomplikowanej budowie, wymagającego specjalnego źródła zasilania,

wskutek czego sprowadza się praktycznie do nieco ulepszonej klasycznej metody z poprawkami rozpatrzonej na początku tego punktu.

Z przytoczonego zestawienia stosowanych metod pomiarowych wynika, że wszystkie one charakteryzują się stosunkowo niewielką dokładnością. Dotyczy to zarówno metod, przy których zużycie mocy przez układ jest znaczne i uwzględniane przez stosowanie poprawek, jak i metod, przy których to zużycie jest pomijalne — gdyż w tych przypadkach urządzenia i przyrządy pomiarowe nie są dostatecznie dokładne.

Brak jednolitej metodyki pomiarów mocy pobranej powoduje niejednoznaczność wyników badań maszyn miniaturowych, a więc uniemożliwia wiarygodne porównywanie wyników otrzymywanych przez rozmaite placówki badawcze.

Dla rozwiązania tej sytuacji można wybrać jedną ze stosowanych metod i zalecić ją do jednolitego stosowania. Takie rozwiązanie może napotkać na znaczne trudności ze względu na dyskusyjność zalet poszczególnych metod. Można również szukać metody, nie posiadającej podstawowych wad stosowanych obecnie metod; jeżeli przy tym będzie ona dokładniejsza i nieskomplikowana w zastosowaniu, a więc nadająca się do powszechnego użytku, można przypuszczać, że rozpowszechni się niejako automatycznie, likwidując aktualny niekorzystny stan rzeczy.

3. PROPONOWANA METODA POMIARU

Dla uniknięcia podstawowej wady większości ze stosowanych metod — poboru mocy przez układ pomiarowy — można zastosować kompensacyjną metodę pomiaru. Pozwala ona na wyeliminowanie przyrządów o bezpośrednim odczytywaniu, naruszających warunki w badanym obwodzie a tym samym zniekształcających wyniki pomiarów.

Kompensacyjna metoda pomiaru sprowadza się do wzajemnego zrównoważenia dwóch sił elektromotorycznych prądu zmiennego. Kompensatory prądu zmiennego przeznaczone do spełnienia tego zadania można podzielić na pracujące w biegunowym lub prostokątnym układzie współrzędnych.

Autorami metod kompensacji w układzie współrzędnych biegunowych byli dla trójfazowych układów zasilających Krukowski [10], a dla jednofazowych — Drysdale [3]. Głównym elementem kompensatora jest przesuwnik fazowy. Otrzymywane z niego napięcie o regulowanym kierunku, przykłada się do dokładnego bezindukcyjnego opornika, a otrzymany z opornika potencjometrycznie spadek napięcia o odpowiednio nastawionym kierunku kompensuje mierzone napięcie. Prąd płynący przez opornik, zwany prądem pomocniczym, mierzony jest za pomocą amperomierza. Osiągnięcie stanu kompensacji wskazuje galwanometr wibracyjny lub równoważny przyrząd. W tym stanie nie jest pobierany prąd z mierzo-

nego układu, pomiar odbywa się więc bez poboru mocy z niego. Jednocześnie, zarówno trój- jak i jednofazowo zasilane kompensatory pozwalają na uzyskanie dużej dokładności pomiarów i mogą być stosowane w zakresie częstotliwości 15 ÷ 110 Hz.

Autorem metody kompensacji w układzie współrzędnych prostokątnych był Geyger [6]. Zasada działania tego kompensatora opiera się na wykorzystaniu transformatora powietrznego o stałym przesunięciu faz napięć o 90° jako przesuwnika fazowego. Kompensacja przeprowadzana jest w dwóch obwodach z opornikami potencjometrycznymi, w których siły elektromotoryczne są przesunięte względem siebie o kąt prosty, tworząc prostokątny układ współrzędnych. Za pomocą manipulacji potencjometrami w obwodach obydwu składowych osiąga się bezprądowy stan kompensacji. Z położeń potencjometrów można obliczyć moduł i fazę mierzonego napięcia względem osi układu współrzędnych. Pomiar odbywa się również bez poboru mocy z mierzonego układu i odznacza się dużą dokładnością. Kompensator może być używany w zakresie częstotliwości 15 ÷ 2500 Hz z tym, że dla zmiennej częstotliwości powinien on być zaopatrzony w specjalny opornik dopasowujący.

Podstawowe problemy wymagające rozwiązania dla osiągnięcia kompensacji napięć zmiennych, to osiągnięcie zgodności częstotliwości, fazy, kształtu krzywych i modułów obydwu przebiegów.

Zgodność częstotliwości można osiągnąć bez trudu zasilając badany obwód i kompensator z tego samego źródła napięcia.

Zgodność faz można osiągnąć albo przez odpowiednie ustawienie przesuwnika fazowego — w przypadku kompensacji we współrzędnych biegunowych, albo przez dobranie odpowiedniego stosunku kompensowanych składowych — w przypadku kompensacji we współrzędnych prostokątnych. Dokładność pomiaru kąta zależy od dokładności wykonania samego kompensatora oraz wzajemnej odpowiedniości kształtów kompensowanej i kompensującej krzywej.

Zgodność kształtów tych krzywych jest warunkiem trudniejszym do osiągnięcia. Jeśli, jak to przeważnie bywa, badane napięcie nie jest idealnie sinusoidalne, podczas gdy napięcie kompensujące ma sinusoidalny kształt, można zastosować selektywny wskaźnik równowagi — wskazujący zrównoważenie przez napięcie kompensujące pierwszej harmonicznej badanego przebiegu. Wyeliminowanie wyższych harmonicznych zniekształca wynik pomiaru modułu badanego napięcia. Jednakże to zniekształcenie, jak wykazano w [10], jest nieznaczne. W przypadku odkształceń przebiegów spotykanych przy badaniach maszyn elektrycznych może być ono pominięte.

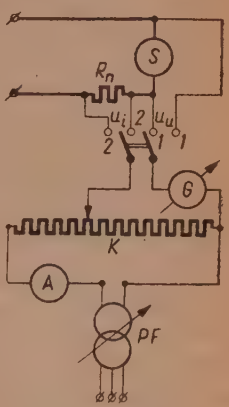
Zgodność modułów jest związana z dokładnością ich pomiaru. Dokładne wyskalowanie oporników wzorcowych kompensatora nie jest

trudne. Trudności nastręcza natomiast dokładny pomiar prądu pomocniczego wskutek braku odpowiednika normalnego ogniwa Westona dla prądu zmiennego. Dla osiągnięcia podobnego rzędu dokładności określenia prądu pomocniczego, co przy kompensatorach prądu stałego, stosuje się szereg pomocniczych metod przekształcających kompensator prądu zmiennego w komparator — przyrząd porównujący pośrednio wartość kompensowanego napięcia zmiennego z dającym się dokładnie wyznaczyć napięciem prądu stałego. Najczęściej stosowane są metody z wykorzystaniem wzorcowego termoelementu, żarówek z fotoelementami i przyrządu elektrodynamicznego o nastawialnym momencie zwracającym [4].

Otrzymywane tymi sposobami zwiększenie dokładności pomiaru modułu powoduje znaczne skomplikowanie i podrożenie układu pomiarowego, oraz utrudnia jego obsługę. Układ pomiarowy do określenia mocy pobranej przez silnik nadający się do praktycznego stosowania powinien natomiast spełniać, poza wymaganiami możliwie wysokiej dokładności, również wymaganie prostoty obsługi.

Rozpatrzmy pod tym kątem widzenia układy do kompensacyjnego pomiaru mocy z wykorzystaniem obydwu wspomnianych rodzajów kompensatorów.

Schemat ideowy układu do pomiaru mocy z kompensatorem Krukowskiego podany jest na rys. 1. Układ z kompensatorem Drysdale będzie różnił się tylko jednofazowo zasilanym przesuwnikiem fazowym [3].



Rys. 1. Schemat układu do pomiaru mocy z kompensatorem Krukowskiego.

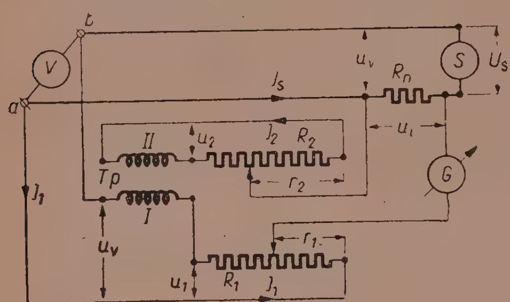
Pomiary polegają na kolejnej kompensacji napięć U_u i U_i. Każdorazowo notowane jest położenie przesuwnika fazowego *PF* i wartość napięcia skompensowanego przeliczona z wielkości prądu pomocniczego mierzonego amperomierzem *A* i stosunku oporności kompensatora *K*.

Wartość napięcia na zaciskach U_u jest w ten sposób określona bezpośrednio. Wartość pobieranego przez silnik prądu może być przeliczona ze spadku napięcia U_i na oporniku wzorcowym R_n. Przesunięcie fazowe między napięciem i prądem może być określone z różnicy położeń kątowych przesuwnika *PF* podczas obydwu pomiarów. W ten sposób zostają wyznaczone wszystkie elementy potrzebne do określenia mocy pobranej przez silnik *S*.

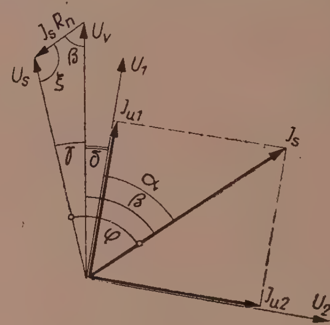
Podana metoda jest bardzo prosta, posiada jednak poważne wady. Pomiary prądu i napięcia są niejednoczesne. Powoduje to konieczność stosowania stabilizacji napięcia zasilającego, a więc wprowadzenia do

układu pomiarowego dodatkowego skomplikowanego urządzenia. Ponieważ w trakcie badań silnika zachodzi konieczność zmieniania w szerokich granicach napięcia zasilającego, przy stosowaniu tej metody występują dodatkowe trudności z jego stabilizacją. W przypadku stosowania trójfazowo zasilanego przesuwnika fazowego konieczne jest również zachowanie dokładnej symetrii napięć zasilających.

Następną wadą są właściwości samego przesuwnika fazowego. Osiągnięcie wysokiej dokładności jego budowy jest rzeczą trudną, co odbija się na dokładności wskazań kątowych. Ponadto na podstawie szeregu doświadczeń i rozważań teoretycznych [6] udowodniono, że przesuwnik fazowy, jeżeli ma być przyrządem precyzyjnym, powinien być często skalowany. Takie skalowanie jest procesem stosunkowo skomplikowanym oraz pracochłonnym.



Rys. 2. Schemat ideowy proponowanego układu do pomiaru.



Rys. 3. Wykres wektorowy napięć i prądów występujących w proponowanym układzie pomiarowym.

Pomiar mocy pobranej przez silnik w proponowanym oryginalnym układzie z zastosowaniem kompensatora Geygera eliminuje wady poprzedniej metody i kosztem bardziej skomplikowanego układu samego przyrządu zapewnia łatwiejszy i dokładniejszy pomiar przy większej uniwersalności przyrządu pod względem wartości napięcia zasilania, mocy i $\cos\varphi$. Umożliwia to dostosowanie kompensacyjnej metody pomiaru mocy do specyfiki badań silników elektrycznych, polegającej na zmianie parametrów maszyny i zasilania podczas pomiarów.

Schemat ideowy takiego układu pomiarowego podano na rys. 2.

Transformator powietrzny Tp zapewnia, dzięki swej konstrukcji, stałe przesunięcie napięcia U_2 w uzwojeniu wtórnym o 90° względem napięcia U_1 w uzwojeniu pierwotnym. Dokładność kąta przesunięcia może być doprowadzona do ułamków minut kątowych [6].

Metoda pomiaru mocy pobranej przez silnik wyniknie z rozpatrzenia wykresu wektorowego proponowanego układu pomiarowego. Wykres ten przedstawiono na rys. 3.

Układ jest zasilany z zacisków a b, do których dołączony jest woltomierz. Prąd płynący przez woltomierz nie wpływa na uchyb pomiarów. Napięcie U_v wskazywane przez woltomierz, zwrot którego będzie w dalszym ciągu uważany za kierunek odniesienia, panuje na zaciskach opornika wzorcowego R_n i badanego silnika S połączonych w szereg. Napięcie na silniku $\hat{U}_s$ można znaleźć odejmując wektorowo spadek napięcia na oporniku wzorcowym $\hat{I}_s R_n$ od napięcia $\hat{U}_v$. To samo napięcie $\hat{U}_v$ panuje również na połączonym w szereg uzwojeniu pierwotnym transformatora powietrznego Tp i opornika R_1. Napięcie $\hat{U}_1$ na oporniku R_1 będzie przesunięte względem $\hat{U}_v$ o kąt δ° spowodowany opornością pozorną pierwotnego uzwojenia transformatora Tp. Kąt δ° zależy tylko od wartości oporności czynnej i indukcyjnej uzwojenia, które dla danego transformatora mogą być dokładnie określone. Kąt δ° jest więc wartością stałą i znaną. Napięcie $\hat{U}_2$ jest przesunięte przez transformator powietrzny Tp o kąt 90° względem $\hat{U}_1$.

Składowe spadku napięcia $\hat{I}_s R_n$ wywołanego prądem płynącym przez silnik $\hat{I}_s$ na oporniku wzorcowym R_n mogą być skompensowane przez zmiany położenia suwaków na opornikach kompensatora R_1 i R_2 Jeżeli przyrząd zerowy G wskaże brak przepływu prądu, składowe spadku napięcia $\hat{I}_s R_n$ będą skompensowane wzdłuż kierunków napięcia $\hat{U}_1$ i $\hat{U}_2$. Wielkości tych składowych $\hat{I}_{u1}$ i $\hat{I}_{u2}$ mogą być obliczone ze stosunków oporów r_1 i r_2 odciętych suwakami na opornikach kompensacyjnych do ich oporów całkowitych R_1 i R_2 oraz z wartości prądów płynących w obwodach I i II. Te wartości prądów mogą być z kolei obliczone z napięcia $\hat{U}_v$ oraz znanej i stałej dla danej częstotliwości zasilania oporności $\hat{Z}_1$ obwodu I i przekładni przesuwnika fazowego ϑ. Mając wartości $\hat{I}_{u1}$ oraz $\hat{I}_{u2}$ można określić wielkość i kierunek prądu płynącego przez silnik $\hat{I}_s$.

Od napięcia podstawowego $\hat{U}_v$ można odjąć wektor spadku napięcia $\hat{I}_s R_n$, łatwy obecnie do określenia, i otrzymać napięcie $\hat{U}_s$ panujące na zaciskach badanego silnika.

W ten sposób zostają wyznaczone wszystkie elementy potrzebne do określenia mocy pobranej przez silnik.

Obecnie przystąpimy do wyprowadzenia wzorów, za pomocą których można obliczyć te elementy na podstawie wyników otrzymanych z pomiaru.

Z pomiaru otrzymuje się wartości U_v, r_1 i r_2. Ponadto znane są stałe wartości $Z_1, \vartheta, \delta^{\circ}, R_1, R_2, R_n$.

W obwodzie I obowiązują następujące zależności

$$I_1 = \frac{U_v}{Z_1}; \quad U_1 = \frac{U_v}{Z_1} R_1 .$$

W obwodzie II obowiązują następujące zależności

$$U_2 = \frac{U_1}{\vartheta}, \qquad I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_1}{\vartheta R_2} = \frac{U_r R_1}{Z_1 R_2 \vartheta}.$$

Przy skompensowanym układzie

$$\frac{I_{k1}}{I_1} = \frac{r_1}{R_1}; \qquad I_{k1} = I_1 \frac{r_1}{R_1} = \frac{U_r r_1}{Z_1 R_1} = c_1 r_1 U_r,$$

$$\frac{I_{k2}}{I_2} = \frac{r_2}{R_2}; \qquad I_{k2} = I_2 \frac{r_2}{R_2} = \frac{U_r R_1}{Z_1 R_2 \vartheta} \frac{r_2}{R_2} = c_2 r_2 U_r,$$ (1

gdzie $c_1 = \frac{1}{Z_1 R_1}$ i $c_2 = \frac{R_1}{Z_1 R_2^2 \vartheta}$ są stałymi zależnymi od konstrukcji kompensatora.

Wartości Z_1, R_1, R_2 i ϑ dobrane są zazwyczaj podczas budowy kompensatora w sposób zapewniający otrzymanie całkowitych i równych sobie wartości c_1 i c_2. Ułatwia to w dużym stopniu obliczenie I_{k1} i I_{k2} z odczytania r_1 i r_2.

Bezpośrednio z wykresu rys. 3. wynika

$$I_s = \sqrt{I_{k1}^2 + I_{k2}^2}; \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{I_{k2}}{I_{k1}}; \qquad \delta = \varphi - \vartheta.$$

W trójkącie utworzonym z wektorów napięć U_r, U_s, $I_s R_n$ obowiązują następujące zależności trygonometryczne

$$\operatorname{tg} \frac{\xi - \psi}{2} = \frac{U_r - I_s R_n}{U_r + I_s R_n} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}, \qquad \frac{\xi + \psi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}, \qquad U_s = U_r \frac{\sin \beta}{\sin \psi}.$$

Z przekształcenia tych zależności można otrzymać

$$\frac{\xi - \psi}{2} = \operatorname{arctg} \left(\frac{U_r - I_s R_n}{U_r + I_s R_n} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \right), \qquad \frac{\xi + \psi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2},$$

a stąd

$$\xi = \operatorname{arctg} \left(\frac{U_r - I_s R_n}{U_r + I_s R_n} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2},$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{U_r - I_s R_n}{U_r + I_s R_n} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \right).$$

Szukane wartości wyrażą się wzorami

$$I_s = \sqrt{I_{k1}^2 + I_{k2}^2},$$

$$U_s = U_r \frac{\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{I_{k2}}{I_{k1}} + \delta' \right)}{\cos\left\{ \operatorname{arctg} \left[\frac{U_r - I_s R_n}{U_r + I_s R_n} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{I_{k2}}{I_{k1}} - \delta' \right) \right] - \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{I_{k2}}{I_{k1}} - \delta' \right) \right\}}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{I_{u2}}{I_{u1}} - \frac{1}{2}\delta + \frac{\pi}{2} - \\ - \operatorname{arctg}\left[\frac{U_v - I_s R_n}{U_v + I_s R_n}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{I_{u2}}{I_{u1}} + \delta^\circ\right)\right]. \tag{2}$$

Skomplikowana postać tych wzorów, jeżeli chodzi o ich zastosowanie praktycznie może być łatwo uproszczona.

Bezpośrednio po wykonaniu odczytów i obliczeniu I_{u1} oraz I_{u2} można znaleźć

$$I_s = \sqrt{I_{u1}^2 + I_{u2}^2}, \tag{3}$$

a znając wartość δ° można obliczyć

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{I_{u2}}{I_{u1}} + \delta^\circ\right) = A^\circ.$$

Z odczytania U_v, znając wartość R_n, można obliczyć

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{U_v - I_s R_n}{U_v + I_s R_n}\operatorname{ctg}\frac{A^\circ}{2}\right) = B^\circ.$$

Wtenczas wzory na U_s i φ przekształcą się do postaci

$$U_s = U_v \frac{\sin A^\circ}{\cos\left(B^\circ - \frac{A^\circ}{2}\right)}, \tag{4}$$

$$\varphi^\circ = \frac{\pi}{2} + \frac{A^\circ}{2} - B^\circ. \tag{5}$$

Znajomość wartości U_s, I_s, φ (wzory 3, 4, 5) pozwala na dokładne określenie wartości mocy pobranej, jej składowych i współczynnika mocy nie obarczonych uchybami związanymi z poborem mocy przez układ pomiarowy.

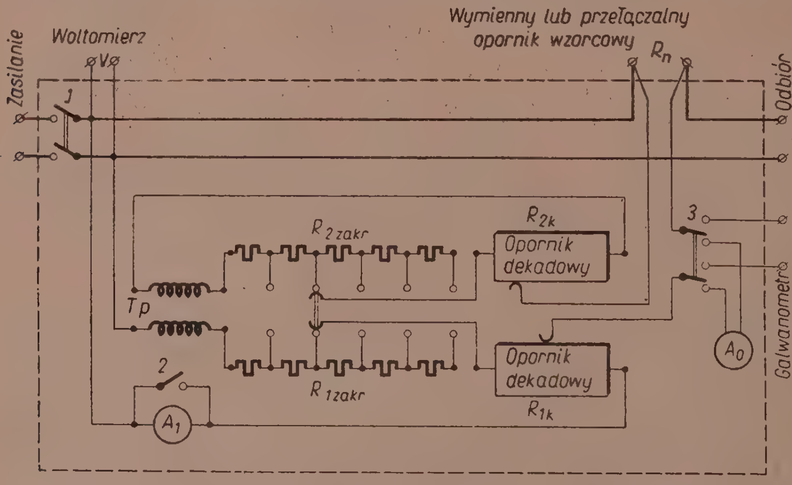
Proponowana metoda odznacza się dużą prostotą obsługi układu pomiarowego składającego się z dwóch przyrządów — woltomierza i kompensatora o specjalnej budowie, której zasada została podana, a założenia konstrukcyjne znajdą się w następnym punkcie pracy. Po doprowadzeniu układu za pomocą manipulacji dwoma opornikami kompensatora do stanu kompensacji tj. zerowego położenia wskazówki galwanometru, przeprowadza się odczytanie napięcia wskazanego przez woltomierz i dwóch wartości oporności oporników kompensatora. Bezpośredni pomiar prądu pomocniczego zastąpiony jest obliczeniem. Pozwala to uniknąć błędów wprowadzanych przez przyrząd i dodatkowe odczytanie i eliminuje ewentualne dalsze skomplikowanie układu przy pomiarze tego prądu na zasadzie komparatora.

Przy należytym wykonaniu transformatora powietrznego wg [5 i 6] zapewniona jest stałość jego parametrów a tym samym odpada konieczność okresowego skalowania kompensatora. Przez zastosowanie dodatkowych elementów korygujących dokładność przesunięcia osi kompensacji o 90° można doprowadzić do ułamków minuty kątowej, a więc wartości pomijalnej nawet przy klasie 0,1 całego przyrządu.

Poważną zaletą metody szczególnie w stosunku do badań silników miniaturowych jest praktyczna niezależność pomiaru od wartości napięcia zasilającego i cos φ badanego silnika, zmieniających się podczas badań w szerokich granicach. Pozwala to na przeprowadzenie pomiarów w pełnym zakresie obciążeń silnika tym samym przyrządem z jednakowo dużą dokładnością. Uzyskane wyniki jako najbardziej zbliżone do rzeczywistości dzięki swej dokładności zasługują na zaufanie i mogą być wykorzystywane do dalszych obliczeń lub korekty metod projektowania wykonanego silnika.

4. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA DO BUDOWY PRZYRZĄDU

Na podstawie podanej zasady działania proponowanego przyrządu można określić podstawowe założenia dotyczące jego budowy. Założenia te zostaną omówione w oparciu o ideowy układ przyrządu podany na rys. 4. Układ ten dla zapewnienia uniwersalności pomiarów mocy w gra-



Rys. 4. Ideowy układ przyrządu do pomiaru mocy pobranej przez silnik.

nicach od ułamków wata do około 100 W przewiduje możliwości stosowania kilku zakresów pomiarowych dla napięcia zasilającego i pobieranego prądu.

Możliwość zmiany zakresów pomiaru napięcia zasilającego zapewnia wprowadzenie do pierwotnego i wtórnego obwodu transformatora po-

wietrznego Tp, przesuwającego napięcia kompensacji o 90°, oporników dopasowujących $R_{1\,zakr}$, $R_{2\,zakr}$. Tworzą one wespół z opornikami dekadowymi kompensatora R_{1k}, R_{2k} dzielniki napięcia. Wartości oporności $R_{1\,zakr}$ i $R_{2\,zakr}$ dla poszczególnych zakresów napięcia zasilającego powinny być tak dobrane względem oporności całkowitej dekad kompensatora, oporności transformatora powietrznego i jego przekładni, aby dla poszczególnych zakresów otrzymać całkowite i równe sobie wartości c_1 i c_2 wzory (1). Ułatwi to określenie wartości I_{u1} i I_{u2} na podstawie otrzymanych przy kompensacji wielkości r_1 i r_2. Jeżeli przewidzieć zakresy napięciowe 12,5 V, 25 V, 75 V, 125 V, 250 V to przy większości praktycznie spotykanych napięć znamionowych silników można będzie przeprowadzać pomiary przy wychyleniu woltomierza gwarantującym dokładność jego wskazań odpowiadającą klasie przyrządu (powyżej połowy skali).

Możliwość zmiany zakresów pomiaru prądu zapewnia włączenie do obwodu silnika oporników wzorcowych R_n o różnych wartościach oporności. Jeżeli spadek napięcia U_i na oporniku wzorcowym założyć w granicach $1 \div 2{,}5$ V, co stanowi wartości korzystne dla kompensacji, to dla pomiarów silników o spotykanych napięciach zasilania od 6 do 220 V i mocy do około 100 W, należałoby przewidzieć wzorcowe oporniki 200Ω, 100Ω, 50Ω, 20Ω. 10Ω, 5Ω, 2Ω, 1Ω, 0,5Ω, 0,2Ω, co umożliwi pomiary w całym zakresie obciążeń tych silników.

Dla ułatwienia obsługi przyrządu do układu mogą być włączone przyrządy wskazówkowe — amperomierz A_1 w obwodzie pierwotnym transformatora powietrznego i amperomierz zerowy A_0 jako wskaźnik kompensacji. Obydwa te przyrządy małej klasy dokładności służyłyby do przybliżonego nastawienia kompensatora w przypadku całkowitej nieznajomości parametrów badanego silnika. Następnie dla dokonania właściwego pomiaru amperomierz A_1 zostawałby zwarty za pomocą zwieracza *2* i wyeliminowany z układu, a zamiast amperomierza A_0 przełącznikiem *3* włączałby się właściwy przyrząd zerowy wysokiej klasy — na przykład galwanometr wibracyjny. Przełączenie przyrządu ze stanu p r z y g o t o w a n i e do stanu p o m i a r mogłoby być wykonywane jednym ruchem dwupołożeniowej dźwigni sprzężonej ze zwieraczem *2* i przełącznikiem *3*.

Podany na rys. 4 układ jest przewidziany do pracy przy jednej określonej częstotliwości zasilania, na przykład przemysłowej 50 Hz. W przypadku, jeżeli przyrząd ma być przystosowany do pomiarów również przy innych częstotliwościach, w obwodzie wtórnym transformatora powietrznego trzeba przewidzieć opornik dopasowujący oporność tego obowdu do częstotliwości, dla utrzymania stałych wartości wspomnianych współczynników c_1 i c_2 [1].

Jeżeli chodzi o wskazówki dotyczące budowy poszczególnych elementów przyrządu, to najważniejszym i najtrudniejszym do wykonania jest

obciążony po stronie wtórnej transformator powietrzny Geygera o stałym przesunięciu napięć w przestrzeni o 90°. Dokładny opis teorii, obliczenia i budowy tego elementu przyrządu można znaleźć w [5 i 6] łącznie ze wskazówkami dla osiągnięcia dokładnej prostopadłości napięć i kompensacji oddziaływania obciążenia. Przy przestrzeganiu wskazówek zawartych w tych opracowaniach można osiągnąć dokładność transformatora i kompensatora rzędu 0,1 ÷ 0,2‰, a dokładność kąta przesunięcia napięć rzędu 0,2 ÷ 0,5 lub, przy zastosowaniu elementów kompensujących oporowo-pojemnościowych lub oporowo-indukcyjnych, jeszcze wyższą.

Wszystkie oporniki przyrządu, zarówno wymienne wzorcowe, jak dekadowe kompensatora i oporniki dopasowujące zakresów powinny być wykonane w wysokiej klasie dokładności jako bezindukcyjne, bezpojemnościowe jak i pozostałe elementy przyrządu odpowiednio wystarzone.

Ponadto podczas budowy przyrządów należy zwrócić uwagę na uniknięcie uchybów spowodowanych prądami izolacyjnymi przez odpowiedni montaż i dokładne izolowanie poszczególnych części kompensatora i obwodu galwanometru. Uchyby od prądów pojemnościowych można zwalczać przez odpowiednie ekranowanie i uziemianie elementów. Eliminacja wpływu pól postronnych, szczególnie ważna w przypadku omawianego przyrządu, omówiona jest w stosunku do transformatora w [5 i 6]; w stosunku do pozostałych elementów obowiązują ogólnie znane zasady.

Przy należytym wykonaniu przyrządu i zastosowaniu odpowiednio dokładnych woltomierza i galwanometru można zapewnić pomiar mocy pobranej i współczynnika mocy silnika miniaturowego w klasie dokładności 0,1 ÷ 0,2%.

5. ZAKOŃCZENIE

Rozwój produkcji silników miniaturowych, podyktowany rosnącym zapotrzebowaniem na nie ze strony automatyki i przemysłu, wyprzedził rozwój metod przystosowanych do ich badania. Istniejące metody, dobre dla normalnych silników, nie wystarczają do spełnienia wymagań prób i projektowania silników miniaturowych. Ten niezadowalający stan rzeczy spowodował potrzebę opracowania dokładnych metod pomiaru parametrów tych silników.

Oryginalny dorobek autora zawarty w pracy polega na dostosowaniu metody kompensacyjnej i opracowaniu koncepcji budowy przyrządu do pomiaru mocy pobranej przez silnik, opartej na wykorzystaniu tej metody. Poza podstawowymi zaletami jak duża dokładność i brak obciążenia badanego obwodu przez układ pomiarowy, jest ona szczególnie przydatna do badania maszyn elektrycznych ze względu na specyfikę warunków wykonywanych pomiarów przy zmiennych w szerokich granicach napięciu zasilającym i współczynniku mocy.

Zwiększenie dokładności pomiarów zapewnia porównywalność wyników i pozwala na dokładniejsze obliczanie charakterystyk układów, w których pracują silniki. Błędy tych obliczeń wykonywanych dotychczas wywołane były w dużym stopniu niedokładnością wykorzystywanych wyników pomiarów (patrz np. wypowiedzi w [8]). Również dopiero zastosowanie proponowanej metody może pozwolić dzięki dokładności uzyskiwanych wyników na korygowanie według nich założeń i obliczeń teoretycznych konstruktora. Może więc ona być wykorzystana nie tylko do bezpośredniej kontroli praktycznej, lecz również pośrednio do kontroli rozważań teoretycznych.

Przy podanych zaletach metoda odznacza się dużą prostotą manipulacji podczas pomiaru i małą liczbą koniecznych odczytów.

Przy przyjęciu założeń budowy proponowanego rozwiązania przyrządu podanych w tekście będzie on zapewniał dokładny pomiar całego zakresu pracy silników prądu zmiennego o mocach od ułamków wata do około 100 W przy znamionowych napięciach zasilających od 6 do 220 V.

Politechnika Warszawska
Katedra Maszyn Elektrycznych

WYKAZ LITERATURY

1. Czeczet Ju. S.: *Issledowanie elektriczeskich mikromaszin.* MEI. 1953.
2. Djaczenko J. S.: *Opriedielenie parametrow odnofaznych asinchronnych dwigatielej.* Wiestnik Elektropromyszlennosti Nr 8/1958.
3. Drysdale C. V.: *Alternating current potentiometers.* Journal IEE vol. 68. 1930.
4. Fuliński W., Gotszlak R.: *Kompensatory prądu zmiennego i ich krajowe wykonanie.* Pomiary-Automatyka-Kontrola. Nr 9. 1959.
5. Geyger W.: *Messungen mit dem Schlifdrath-Wechselstromkompensator.* Archiv für Elektrot. 17. 1926.
6. Geyger W.: *Über die Verwendung sekundär belasteter Lufttrasformatoren bei Wechselstrom kompensations Messungen.* Archiv für Elektrot. Bd 15. 1925.
7. Hupp R. L., Suhr F. W.: *A quadrature-phase-shift voltage transformer device and its applications.* Trans. AIEE vol. 71. 1952.
8. Kasprżak G. M., Slepuszkin E. J.: *Ischodnyje parametry i wieliczyny dla rasczota charaktieristik dwuchfaznych mikromaszin i ich opriedielenie.* Awtomatika i telemechanika. t. XVII. 1956. Nr 7.
9. Koczubijewskij F. D.: *Prostoj sposob izmierienia małoj moszcznosti pieriemiennowo toka.* Elektriczestwo Nr 5. 1954.
10. Krukowski W.: *Der Wechselstromkompensator.* Springer 1920.
11. Łopuchina E. M., Somichina G. S., Kłokow B. K.: *Srawnienie opytnowo opriedielenia parametrow maszin s połym rotorom.* Wiestnik Elektroprom. Nr 10. 1959.
12. Mirenskij M. S.: *Izmierienie małoj moszcznosti pieriemiennowo toka pri pomoszczi ampermetra.* Elektriczestwo Nr 9. 1950.
13. Pustoła J., Śliwiński T.: Małe silniki jednofazowe. PWT 1959.
14. Zacharian B. M.: *Niekotoryje woprosy ispytania małych elektrodwigatielej.* Wiestnik Elektroprom. Nr 3. 1959.

МЕТОД ТОЧНОГО ИЗМЕРЕНИЯ МОЩНОСТИ, ПОТРЕБЛЯЕМОЙ МИКРОДВИГАТЕЛЕМ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОМПЕНСАТОРА В СИСТЕМЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ

Анализ метод применяемых в настоящее время для измерения мощности потребляемой микродвигателями позволяет прийти к заключению, что — несмотря на значительную сложность некоторых из них — они не обеспечивают возможности получения точности результатов достигаемой при исследовании двигателей большей мощности. В статье предложена оригинальная схема использующая компенсационный метод измерения мощности. Принимая в качестве базиса вектор напряжения питания, потребляемый ток разлагается на две взаимно перпендикулярные составляющие, которые поочередно компенсируются. Такое решение позволяет на получение определенной точности результатов измерения независимо от коэффициента мощности двигателя, который может изменяться в течение исследования двигателя в широких пределах. Схема позволяет также обеспечить независимость точности измерения от величины напряжения питания. Теория принципа измерения в предлагаемой схеме пополнена основными данными для конструкции прибора, удобного для практического применения.

Прибор построенный согласно этим данным позволит на измерения потребляемой мощности в диапазоне от долей ватта до около 100 *ватт*, при напряжениях питания от 6 до 220 *вольт*.

Прибор отличается предельной простотой манипуляции при одновременном обеспечивании высокой точности результатов измерений (класс 0,1%). Упомянутая независимость точности измерений от изменений напряжения питания и коэффициента мощности является особо ценным качеством при исследованиях электрических машин. Она позволяет на проведение измерений во всем диапазоне нагрузок двигателя от режима холостого хода до режима короткого замыкания одним прибором и при одинаковом классе точности измерения. Благодаря большой точности результатов они могут быть использованы равно для непосредственной оценки двигателя как и для расчетов систем, в которых будет работать этот двигатель и корректировки метод проектирования самого двигателя.

ACCURATE MEASUREMENT OF POWER DRAWN BY MICROMOTOR USING COMPENSATOR IN RECTANGULAR COORDINATE SYSTEM

Analysis of methods as presently used in measurement of power drawn by the micromotors points out that none of them despite their considerable complexity cannot guaranty the accuracy of measurement results at least of such a degree which is feasible when testing larger motors.

The novelty of the system, as suggested in this paper consists in the application of compensation method for measurement of the power. Let the sense of supply voltage be regarded as basic then the current drawn by the motor is resolved into two perpendicular to each other components which in turn may be compensated. Such an approach to the problem permits to free the measurement accuracy from the value of the power factor of motor which may vary within extensive limits in the course of carried out tests. Moreover, the system enables to free the measurements accuracy from the influence of the value of the supply voltage.

Theory of the measurement principle, as developed in suggested system, is further extended by the additional assumptions which are foundamental for designing of the instrument handy in practical use. These assumptions anticipate the possibility of power measurement with the meter within range extending from the fraction of 1 up to 100 W at the nominal supply voltages ranging from 6 to 220 V.

The instrument based upon the use of suggested method is distinguishable by simplicity of the maintenance and yet high accuracy of obtainable results (class 0,1). The independence of the measurement accuracy from the voltage — and power factor makes this instrument particurarly suitable for testing of the electrical motors. It permits to carry out the measurements within the global range of the motor load commencing from its idling run up to full load with still the same instrument and for the same measurement class. Owing to the accuracy the measurements results may be used for direct motor assessment and for the calculations of the circuits with which the motor colaborates, and for the correction of the calculation methods practised in its designing.

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI
TOM X ZESZYT 1 1961

621.317.729.2

J. HRYŃCZUK

Obliczanie rozkładu amperozwojów solenoidu

Rękopis dostarczono 4. 12. 1959.

Artykuł omawia metodę obliczania rozkładu amperozwojów solenoidu cylindrycznego wytwarzającego jednorodne pole magnetyczne do spektrografu masowego.

Wymagania stawiane jednorodności pola magnetycznego oraz warunki techniczne, zmuszają konstruktorów do rozstrzygnięcia zagadnienia odpowiedniego doboru rozkładu amperozwojów solenoidu cylindrycznego zapewniającego w wybranym obszarze wewnątrz solenoidu z dużą dokładnością jednorodne pole magnetyczne.

Stosowanie nadmiernie długich solenoidów jest kosztowne niewygodne i technicznie nieuzasadnione. Z prac teoretycznych poświęconych temu zagadnieniu na uwagę zasługuje praca W. Glasera [2], w której autor podaje transformację Fouriera poszukiwanego rozkładu amperozwojów dla dowolnego kształtu pola magnetycznego. Praca ta jednak nie rozwiązuje praktycznie zagadnienia, ponieważ obliczenie tej transformacji jest niezmiernie kłopotliwe czego dowodem jest to, że Glaser nie podaje w swojej pracy najprostszego nawet przykładu liczbowego.

Można podać kilka sposobów rozwiązania tego zagadnienia. Najprostszym jak się wydaje i wystarczająco dokładnym do tego celu jest sposób podany niżej.

Natężenie pola magnetycznego wzdłuż osi cewki kołowej o skupionych amperozwojach iz wyraża się znanym wzorem

$$H = \frac{izR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}} \quad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}} \tag{1}$$

gdzie R — promień cewki w cm,

x — odległość od środka cewki w cm.

Elementarne natężenie pola magnetycznego w odległości x wywołane taką samą ceweczką o amperozwojach $iz(y)\,dy$ umieszczoną w odległości y (rys. 1).

$$dH = \frac{R^2 iz(y)dy}{2[R^2+(x-y)^2]^{3/2}} \quad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}}. \tag{2}$$

Rzeczywista wartość natężenia pola magnetycznego solenoidu o dowolnym rozkładzie amperozwojów w odległości x od środka uzwojenia wyraża się wzorem

$$H(x)=\frac{i}{2}\int_{-l}^{+l}\frac{R^2 z(y)dy}{[R^2+(x-y)^2]^{3/2}}\quad\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}}. \tag{3}$$

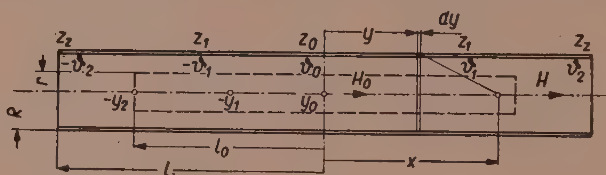
Dzieląc licznik i mianownik równania (3) przez R i wprowadzając nowe oznaczenia

$$\eta=\frac{x}{R},\qquad \vartheta=\frac{y}{R},\qquad \vartheta_0=\frac{l}{R} \tag{4}$$

napiszemy równanie (3) w nowej postaci

$$H(\eta)=\frac{i}{2}\int_{-\vartheta_0}^{+\vartheta_0}\frac{z(\vartheta)d\vartheta}{[1+(\eta-\vartheta)^2]^{3/2}}\quad\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}}. \tag{5}$$

W ten sposób obliczanie amperozwojów solenoidu przy zadanym kształcie składowej osiowej natężenia pola magnetycznego, sprowadziliśmy do zagadnienia rozwiązania równania całkowego typu Fredholma



Rys. 1

pierwszego rodzaju gdzie poszukiwaną funkcją jest $z(\vartheta)$. Ponieważ rozwiązanie tego równania w sposób ścisły jest trudne zastosujemy prostą metodę przybliżoną opartą na sprowadzeniu równania całkowego (5) do układu równań liniowych algebraicznych [5]. Mianowicie wyrazimy natężenie pola ze wzoru (5) w trzech punktach η_0, η_1, η_2 położonych na osi badanego obszaru przy pomocy przybliżonej wartości wyrażenia całkowego. Wyrażenie to zastąpimy przybliżonym, według znanego wzoru Simpsona opartego o aproksymację paraboliczną funkcji podcałkowej w punktach $-\vartheta_2, -\vartheta_1, \vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2$ w których z_0, z_1, z_2 są przybliżonymi wartościami poszukiwanej funkcji rozkładu amperozwojów. Postępowanie takie zapewnia stosunkowo niezłą dokładność. Wzór Simpsona w ogólnej postaci wyraża się następująco

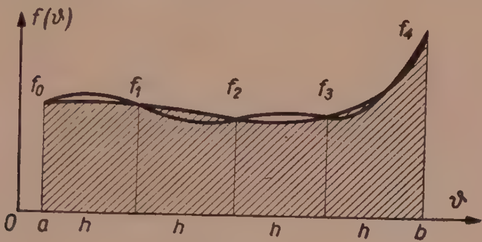
$$\int_a^b f(\vartheta)d\vartheta\approx\frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+\ldots+f_n) \tag{6}$$

gdzie

$$h=\frac{b-a}{n}.$$

P r z y k ł a d.

Dane są wymiary solenoidu $l=70$ cm, $R=10$ cm oraz obszaru jednorodnego pola magnetycznego $l_0=50$ cm, $r_0=5$ cm.



Rys. 2

Sporządzamy tablicę wartości funkcji podcałkowej

$$f(\eta,\vartheta)=\frac{z(\vartheta)}{[+(\eta-\vartheta)^2]^{3/2}}$$

w interesujących nas punktach $-\vartheta_2$, $-\vartheta_1$, ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2 przy ustalanych kolejno wartościach η_0, η_1, η_2.

Tablica 1

ϑ	$-\vartheta_2$ -7	$-\vartheta_1$ $-3{,}5$	ϑ_0 0	ϑ_1 $3{,}5$	ϑ_2 7
	z_2	z_1	z_0	z_1	z_2
η_0 0	0,00283	0,0208	1,0000	0,0208	0,00283
η_1 2,5	0,00115	0,00445	0,0510	0,3530	0,01020
η_2 5,0	0,00058	0,00161	0,00756	0,1700	0,08930
	1	4	2	4	1

Następnie rozpisujemy na podstawie tablicy 1. trzykrotnie przybliżoną wartość równania całkowego dla wartości η_0, η_1, η_2 skąd mamy układ trzech równań

$$\frac{H}{i}\,1{,}71=0{,}00283\,z_2+0{,}0832\,z_1+2\,z_0+0{,}0832\,z_1+0{,}00283\,z_2$$

$$\frac{H}{i}\,1{,}71=0{,}00115\,z_2+0{,}0178\,z_1+0{,}102\,z_0+1{,}41\,z_1+0{,}0102\,z_2$$

$$\frac{H}{i}\,1{,}71=0{,}00058\,z_2+0{,}00644\,z_1+0{,}015\,z_0+0{,}68\,z_1+0{,}0893\,z_2\,.$$

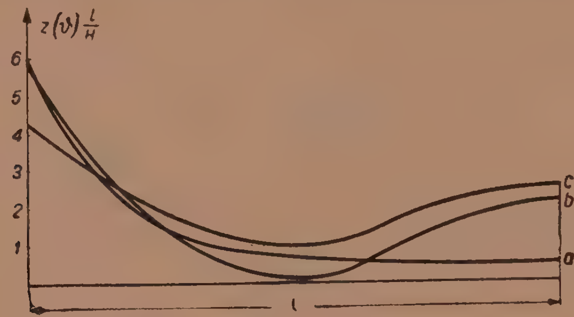
Po uporządkowaniu i rozwiązaniu układu równań względem niewiadomych z_0, z_1, z_2 otrzymamy następujące wartości przybliżone szukanej funkcji rozkładu amperozwojów

$$z_2=5{,}99\,\frac{H}{i}$$

$$z_1 = 0{,}668\,\frac{H}{i}$$

$$z_0 = 0{,}428\,\frac{H}{i}\,.$$

Na rys. 3a pokazano graficznie rozkład gęstości amperozwojów solenoidu wynikający z interpolacji funkcji przy pomocy wartości z_2, z_1, z_0.



Rys. 3

Celem obliczenia całkowitej ilości amperozwojów całkujemy w przybliżony sposób wyrażenie

$$z_c = 2\int_0^l z(y)dy \approx 2\cdot\frac{35}{3}(0{,}428+40{,}668+5{,}99)\frac{H}{i} = 212\frac{H}{i}\,.$$

Stąd sumaryczne amperozwoje

$$i\,z_c = 212\,H \text{ w A}$$

Solenoid o tych samych wymiarach i amperozwojach ale nawinięty w sposób jednorodny posiadałby w środku maksymalne natężenie pola

$$H_0 = 1{,}54\,H$$

a więc o 54% większe.

Ważną przyczyną niedokładności obliczeń jest założenie w rozważaniach uzwojenia idealnie cienkiego. W rzeczywistości działanie części amperozwojów położonych zwłaszcza na krańcach solenoidu ze względu na grubość rzeczywistego uzwojenia będzie zmniejszone wskutek oddalenia ich od warstwy podstawowej. W tych miejscach należy się liczyć z koniecznością zwiększenia amperozwojów w stosunku do wyliczonych. Poprawka ta może być wniesiona już na wykresie (rys. 3) i dokładnie skorygowana jedynie na drodze pomiarowej, nie powinna ona przekraczać kilku procent ogólnej liczby amperozwojów. W pewnych przypadkach celowe jest uzyskanie większej dokładności obliczania równania całkowego poprzez zwiększanie podziału obszaru całkowania. Przy zachowaniu dobrej jednorodności pola wzdłuż osi, błędy wynikające z tytułu oddalenia badanego punktu od osi lub od składowej radialnej pola jak

wynika z analizy tego typu pola są dużo mniejsze od błędów na osi, co łatwo można stwierdzić na podstawie wzorów podanych przez Mentzla [4]. Wyżej podana metoda nadaje się również do obliczania amperozwojów solenoidów wytwarzających pole o dowolnym kształcie składowej osiowej, jest rachunkowo prosta i wystarczająco dokładna.

Politechnika Gdańska

WYKAZ LITERATURY

1. B a r k e r I. R.: *An improved three-coil system for producing a uniform magnetic field.* — Journal of scientific Instr., s. 197, 1950.
2. G l a s e r W.: *Über die zu einen vorgegebenen Magnetfeld gehörende windungsdichte einer Kreisspule.* Z. Physik 1941 (118) ss. 264—268.
3. H a k J.: *Eisenlose Zylinderspulen mit ungleichmässiger windungsdichte zur Erzeugung von homogen Feldern.* Archiv für Elektrot., t. 30, s. 736, 1936.
4. M e n z e l D. H.: *Fundamental formulas of physics* 1955.
5. M i c h l i n S. G.: *Intiegralnyje urawnienia* 1949.
6. R u b e n s S. M.: *Review of scientific instr.,* s. 243, 1945.

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЕРВИТКОВ СОЛЕНОИДА МАССОВОГО СПЕКТОГРАФА

В статье обсужден метод вычисления распределения ампервитков цилиндрического соленоида, создающего однородное магнитное поле в массовом спектографе.

COMPUTATION OF AMPERE-TURNS ARRANGEMENT IN SOLENOID INTENDED FOR MASS SPECTROGRAPH

The paper is concerned with the computation of ampere-turns arrangement in the straight solenoid generating an uniform magnetic field for the mass spectrograph.

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI
TOM X ZESZYT 1 1961

621.3.018.44

J. HRYŃCZUK

Wpływ naskórkowości udarowej na nagrzewanie przewodów prądami udarowymi

Rękopis dostarczono 29. 1. 1960.

Omówiono nagrzewanie przewodów o przekroju kołowym prądami udarowymi z dokładnym uwzględnieniem wpływu naskórkowości udarowej.

Wpływ naskórkowości udarowej na nagrzewanie przewodów mający poważne znaczenie w zagadnieniach technicznych, był badany na drodze teoretycznej przez S. Szpora [5, 6, 7], A. Awramescu [1], L. Castagnetto [2], H. Ryżke i W. Lidmanowskiego [4]. Wymienione prace oparte były na poważnych uproszczeniach natury matematycznej i fizykalnej. Dokładne rozwiązanie zagadnienia rozkładu gęstości prądu w przewodzie o przekroju kołowym w warunkach udarowych podane przez autora [3] pozwoliło na uzyskanie poprawnych wyników. Niniejsza praca poświęcona jest dokładnemu obliczaniu nagrzewania przewodów w warunkach udarowych oraz podaje prosty praktyczny wzór dla warunków zaostrzonych zaniedbujących łagodzący wpływ czoła udaru.

Ponieważ ciepło wydzielane podczas krótkotrwałego przepływu prądu jest całkowicie pochłaniane przez przewód a konwekcja i promieniowanie mają znikomy wpływ na odprowadzanie ciepła, możemy napisać bilans cieplny dla elementarnej objętości przewodnika dV w sposób następujący

$$\frac{j^2}{\gamma} dt dv = c\delta dv d\vartheta , \tag{1}$$

gdzie: j — gęstość prądu,
γ — przewodność elektryczna,
c — ciepło właściwe,
δ — gęstość masy,
$d\vartheta$ — elementarny przyrost temperatury,
dt — elementarny przyrost czasu.

Po upływie czasu t przyrost temperatury

$$\vartheta = \frac{1}{\gamma c \delta} \int_0^t j^2(\tau) d\tau . \tag{2}$$

Celem oszacowania największego przyrostu temperatury jaka występuje na powierzchni przewodnika przeprowadzimy obliczenia przyrostu temperatury ϑ_n dla przewodu o przekroju kołowym spowodowanego jedynie efektem naskórkowości udarowej w najostrzejszym przypadku jakim jest udar prostokątny, mianowicie

$$\vartheta_n = \frac{1}{\gamma c \delta} \int_0^\infty (j^2 - j_0^2) d\tau , \tag{3}$$

gdzie: $j_0 = \frac{I}{S}$ — gęstość prądu w stanie ustalonym,

I — maksymalna wartość prądu,

S — przekrój przewodu.

Ze wzoru na rozkład gęstości prądu w procesach udarowych podany przez autora [3] otrzymamy dla udaru prostokątnego prądu dla warstwy przyściennej następujące wyrażenie

$$j = \frac{I}{S}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\varphi_n^2 \frac{t}{T}\right)\right] \tag{4}$$

gdzie: $T = \frac{\gamma\mu}{\pi} S$ — stała czasowa,

φ_n — pierwiastki funkcji Bessela $I_1(\varphi_n) = 0$

μ — przenikalność magnetyczna.

Podstawiając wyrażenie (4) do wzoru (3) oraz wykonując całkowanie otrzymamy

$$\vartheta_n = \frac{0{,}141 \mu w}{c\delta} \frac{I^2}{S} , \tag{5}$$

gdzie: c — w $\frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{g\,^\circ C}}$

δ — w $\mathrm{g/cm^3}$

I — w kA

S — w $\mathrm{mm^2}$.

Przyrost temperatury wywołany prądem udarowym o pionowym czole i wykładniczym grzbiecie

$$i(t) \begin{cases} = 0 \ \text{dla} \ t < 0 \\ = I \exp\left(-\frac{t}{T_p} \ln 2\right) \ \text{dla} \ t \geqslant 0 \end{cases}$$

gdzie: T_p — czas trwania do półszczytu bez udziału naskórkowości wyrazi się wzorem

$$\vartheta_0 = \frac{T_p}{\gamma c \delta \, 2 \ln 2} \left(\frac{I}{S}\right)^2 = \frac{0{,}722}{\gamma c \delta} \left(\frac{I}{S}\right)^2 T_p . \tag{6}$$

Ponieważ dokładne obliczenie nagrzewania przewodu z jednoczesnym uwzględnieniem wpływu naskórkowości jakkolwiek zupełnie proste prowadziłoby do skomplikowanego wzoru ogólnego praktycznie mało przydatnego, poprzestaniemy na razie na zaostrzonym nieco rozważaniu. Mianowicie dokonamy sumowania przyrostów temperatur ϑ_0 i ϑ_n, co dla kilku kolejnych udarów daje wyrażenie

$$\vartheta = \sum (\vartheta_0 + \vartheta_n) = \frac{1}{\gamma c \delta S^2} \sum_{k=1}^{m} I_k^2 (0{,}722\, T_{pk} + 0{,}141\, \gamma \mu_w S), \tag{7}$$

gdzie: μ_w — przenikalność magnetyczna względna
γ — w $m/\Omega\, mm^2$
c — w $ws/g°C$
δ — w g/cm^3
S — w mm^2
I — w kA
T_p — w µs.

Wprowadzając oznaczenia

$$K_m = \sqrt{\gamma c \delta \vartheta} \quad \text{współczynnik materiałowy} \tag{8}$$

$$S_0 = \frac{1}{K_m} \sqrt{\sum_k I_k^2 T_{pk}\, 0{,}722} \tag{9}$$

$$S_n = \frac{0{,}141\, \gamma \mu w}{K_m^2} \sum_k I_k^2 \tag{10}$$

ze wzoru (7) otrzymamy wyrażenie na wymagany przekrój przewodu ze względu na dopuszczalny przyrost temperatury uwzględniający w sposób zaostrzony oba czynniki

$$S = \frac{1}{2} S_n + \sqrt{\left(\frac{S_n}{2}\right)^2 + S_0^2} \quad \text{w } mm^2 \tag{11}$$

Dla udarów o czasie trwania czoła T_c równym lub większym od stałej czasowej

$$T_1 = \frac{T}{\varphi_1^2} = 0{,}0273\, \gamma \mu_w S \quad \text{w µs} \tag{12}$$

która jest miarą czasu trwania stanu nieustalonego w przewodzie związanego z naskórkowością, wpływ kształtu czoła na nagrzewanie jest poważny i wtedy należy obliczyć go dla konkretnego przypadku ze wzoru (2) podstawiając za gęstość prądu wyrażenie [3]

$$j(t) = \frac{1}{S} \left\{ i(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[i(t) - \frac{\varphi_n^2}{T} \int_0^t i(\tau) \exp\left(-\varphi_n^2 \frac{t-\tau}{T} \right) d\tau \right] \right\} \tag{13}$$

Dla dużej wartości stosunku stałych czasowych $\frac{T_c}{T_1}$ wpływ naskórkowości można praktycznie zaniedbać.

Dokładne obliczenie przyrostu temperatury według wzorów (2) i (13) jest proste lecz pracochłonne, może być łatwe i szybkie do uzyskania jedynie za pomocą maszyny matematycznej (cyfrowej), dla której programowanie tego typu zagadnień nie nastręcza trudności. Pozwoli to na proste i dokładne rozstrzygnięcie interesujących w praktyce problemów związanych z nagrzewaniem przewodów prądami udarowymi.

Politechnika Gdańska

WYKAZ LITERATURY

1. Avramescu A.: *Transient skin-effect.* Revue D'Élektrotechnique et D'Énergetique. T. I, Nr 1, 1956.
2. Castagnetto L.: *Effet pelliculaire en endes de choc.* Comples rendus de Academic des Sciences, 6, 246. 1958.
3. Hryńczuk J.: *Przyczynek do analizy zjawiska naskórkowości udarowej* Arch. Elektr. T. VIII, z. 3, s. 520. 1959.
4. Ryżko H., Lidmanowski W.: *Obliczanie przekrojów przewodów na prądy piorunów z uwzględnieniem naskórkowości.* Arch. Elektr. T. VI, s. 115, 1957.
5. Szpor S.: *Effet pelliculaire en courant de choc du a la foudre.* CIGRE 1946, ref. 323.
6. Szpor S.: *Ochrona odgromowa.* T. I, 1953, rozdz. 28.
7. Szpor S.: *Obliczanie przekrojów przewodów na prądy piorunów z uwzględnieniem naskórkowości.* Arch. Elektr. T. VII, z. 2, s. 321. 1958.

ВЛИЯНИЕ УДАРНОГО ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА НА НАГРЕВАНИЕ ПРОВОДНИКОВ УДАРНЫМ ТОКОМ

Обсуждено нагревание проводников круглого поперечного сечения ударными токами с тщательными учетом влияния ударного поверхностного эффекта.

INFLUENCE OF SURGE SKIN-EFFECT ON HEATING OF CONDUCTORS BY SURGE CURRENTS

The author discusses the heating of circular cross-sectional conductors by the surge currents taking account of the influence exercised by the surge skin-effect.

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI
TOM X ZESZYT 1 1961

621.317.733

J. SAWICKI

Właściwości niezrównoważonego mostka Wheatstone'a

Rękopis dostarczono 27. 1. 1960

W pracy omówiono podstawowe właściwości niezrównoważonego (czyli odchyłowego) mostka Wheatstone'a. Mostek taki jest często stosowany w pomiarach wielkości nieelektrycznych przy użyciu układów elektrycznych. Artykuł zawiera analityczne wyprowadzenie charakterystyki mostka, czyli zależności pomiędzy względnym rozstrojeniem układu a odchyleniem przyrządu zerowego dla czterech głównych przypadków. Przedyskutowano także sposób zapewnienia stałości charakterystyki układu przy zmianie warunków pomiaru.

1. WSTĘP

Różnica pomiędzy odmianą niezrównoważoną a zrównoważoną mostka Wheatstone'a tkwi w tym, że metoda odchyłowa nie wymaga sprowadzenia wskaźnika równowagi do zera, a wartość oporu mierzonego R_x określa się z analitycznej lub graficznej charakterystyki układu w oparciu o odczytane odchylenie tego wskaźnika.

Użyty wskaźnik może mieć charakter prądowy lub napięciowy. Do pierwszej grupy należą te przyrządy, których odchylenie wywoływane jest w zasadzie prądem płynącym przez miernik. Dla przykładu można tu wymienić galwanometr lub pętlicę oscylograficzną. W drugiej grupie znajdują się te rodzaje mierników, których odchylenie jest uwarunkowane istnieniem różnicy potencjałów na zaciskach — nawet bez przepływu prądu. Należą tu w pierwszym rzędzie kompensatory samoczynne a także mierniki i oscylografy elektroniczne o bardzo dużej oporności wejściowej.

Charakterystyka mostka niezrównoważonego zależy również od tego, czy jest on zasilany stałą wartością natężenia czy też napięcia. Należy przez to rozumieć, że natężenie prądu dopływającego do mostka lub napięcie na jego zaciskach źródłowych ma być niezależne od aktualnej wartości oporności mierzonej.

Wyżej przytoczone założenie nie zawsze jest łatwe do spełnienia. Wynika to z faktu, że oporność zastępcza mostka widziana z zacisków zasilania zmienia się w pewnych granicach przy zmianie oporności mierzonej.

Zjawisko to występuje w sposób niepomijalny już przy niezbyt dużych względnych rozstrojeniach mostka. Pominięcie go może prowadzić do znacznych błędów pomiaru. Z drugiej strony, wprowadzenie do rozważań oporności wewnętrznej źródła znacznie komplikuje wzory i zaciera stosunkowo prosty charakter podstawowej zależności w mostku niezrównoważonym.

Z tego względu konieczne było zbadanie zależności pomiędzy opornością zastępczą mostka i wartością obiektu badanego oraz wskazanie drogi, na której można łatwo uzyskać spełnienie założenia I_M = const wzgl. U_M = const — przy zachowaniu możliwości niwelowania wpływu rozładowania źródła zasilającego układ pomiarowy.

Dążąc do uzyskania możliwie prostych wzorów algebraicznych w rozważaniach stosować będziemy wyrażanie poszczególnych oporów jako krotności pewnej oporności odniesienia (podstawowej). Dla elementów tworzących właściwy mostek przyjmujemy jako oporność odniesienia taką wartość oporu obiektu badanego, przy której układ byłby w równowadze; oznaczamy ją przez R. Poszczególne oporności wyrażamy wówczas jako

$$R_x=(1+X)\cdot R;\ R_a=m\cdot R;\ R_b=m\cdot n\cdot R;\ R_c=n\cdot R;\ R_g=p\cdot R, \tag{1}$$

gdzie X, m, n, p są współczynnikami niemianowanymi. Wielkość X będziemy nazywać względnym rozstrojeniem mostka.

Oporność zastępczą mostka widzianą z zacisków źródłowych oznaczymy symbolem R_M. Oporniki: włączony szeregowo ze źródłem R_s oraz przyłączony równolegle do zacisków zasilania mostka R_t — wyrazimy jako krotności tej wartości R_{M0}, która odpowiada stanowi równowagi

$$R_s=s\cdot R_{M0};\ R_t=\frac{1}{t}R_{M0}. \tag{2}$$

Symbole δ_{RM}, δ_{IM} oraz δ_{UM} oznaczają odpowiednio względne zmiany oporności zastępczej, prądu lub napięcia na mostku przy $X\neq 0$.

2. NIEZRÓWNOWAŻONY MOSTEK ZASILANY NIEZMIENNYM NATĘŻENIEM I_M = const (X)

W pierwszym rzędzie zostanie rozpatrzony przypadek ze wskaźnikiem napięciowym. Zgodnie z poprzednimi wywodami widać, że w przekątnej galwanometrycznej prąd nigdy nie płynie — i to bez względu na stan mostka. Rozstrojenie mostka powoduje jednak powstanie różnicy potencjałów e_g na zaciskach galwanometrycznych, która decyduje o odchyleniu wskaźnika według zależności

$$e_g=C_u\cdot\alpha, \tag{3}$$

gdzie C_u oznacza stałą napięciową użytego przyrządu.

W przypadku drugim — ze wskaźnikiem prądowym — prąd w przekątnej galwanometrycznej zanika jedynie przy równowadze układu. Zależność pomiędzy tym prądem a odchyleniem a wyraża się jako

$$i_g = C_i \cdot a\,, \tag{4}$$

gdzie C_i jest stałą prądową użytego miernika.

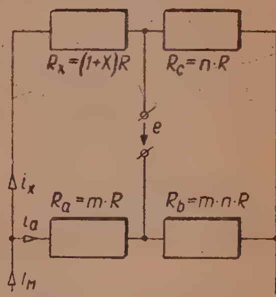
U k ł a d z e w s k a ź n i k i e m n a p i ę c i o w y m

Stosownie do schematu ideowego obowiązującego dla tego przypadku (rys. 1) — można napisać następujący układ równań:

$$\left.\begin{aligned} i_x + i_a &= I_M \\ i_x(R_x + R_c) &= i_a(R_a + R_b) \\ i_x \cdot R_x - i_a \cdot R_a - e_g &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń (1) układ ten przybiera postać

$$\left.\begin{aligned} i_x \cdot 1 \qquad\quad &+ i_a \cdot 1 &&+ e_g \cdot 0 = I_M \\ i_x(1+n+X) &- i_a \cdot m(1+n) &&+ e_g \cdot 0 = 0 \\ i_x \cdot R(1+X) &- i_a \cdot R \cdot m &&- e_g \cdot 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$



Rys. 1. Schemat do układu ze wskaźnikiem napięciowym.

Z powyższego łatwo wyznaczyć wartość e_g jako

$$e_g = \frac{I_M \cdot R \cdot m \cdot n \cdot X}{X + (1+m)(1+n)} = C_u \cdot a.$$

Otrzymane wyrażenie pozwala już obliczyć

$$\lim_{X \to \infty} a = \frac{I_M \cdot R}{C_u} \cdot m \cdot n\,.$$

Przekształcając w dalszym ciągu dochodzimy do charakterystyki rozpatrywanego mostka:

$$X = \frac{[(1+m)(1+n)] \cdot a}{\left[\dfrac{I_M \cdot R}{C_u} m \cdot n\right] - a}\,.$$

Mianownik tego wyrażenia staje się zerem tylko w przypadku gdy $X \to \infty$ — jak o tym świadczy poprzednio obliczona wartość granicy.

Otrzymaną analityczną charakterystykę mostka niezrównoważonego można krótko zapisać w następujących postaciach:

$$X = \frac{k \cdot a}{a_\infty - a}\,, \tag{5}$$

$$X = \frac{k}{\dfrac{a_\infty}{a} - 1}\,, \tag{6}$$

$$a = a_\infty \cdot \frac{X}{X+k}\,, \tag{7}$$

gdzie

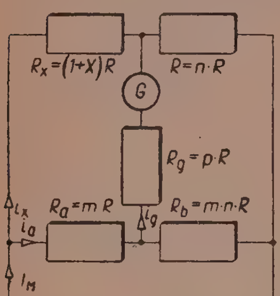
$$\left.\begin{aligned} k &= (1+m)(1+n), \\ a_\infty &= \frac{I_M \cdot R}{C_u} m \cdot n . \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Warto podkreślić, że współczynnik k jest istotnie wartością stałą, natomiast odchylenie graniczne a_∞ zależy wprost proporcjonalnie od natężenia prądu zasilającego mostek. Wartość wyrażenia $\frac{k}{a_\infty}$ daje pojęcie o czułości mostka.

Układ ze wskaźnikiem prądowym

Schemat ideowy dla rozpatrywanego przypadku przedstawiono na rys. 2. Przez R_g należy rozumieć oporność wypadkową galwanometru z ewentualnym bocznikiem uniwersalnym lub tp. Wychodząc z zależności

$$\left.\begin{aligned} & i_x + i_a = I_M \\ & i_x \cdot R_x + (i_x + i_g) R_c = i_a \cdot R_a + (i_a - i_g) R_b \\ & i_x \cdot R_x - i_a \cdot R_a - i_g \cdot R_g = 0 \end{aligned}\right\}$$



Rys. 2. Schemat do układu ze wskaźnikiem prądowym.

po wprowadzeniu oznaczeń (1) otrzymujemy układ równań

$$\left.\begin{aligned} & i_x \cdot 1 + i_a \cdot 1 + i_g \cdot 0 = I_M \\ & i_x(1+n+X) - i_a \cdot m(1+n) + i_g \cdot n(1+m) = 0 \\ & i_x(1+X) - i_a \cdot m - i_g \cdot p = 0 \end{aligned}\right\}$$

i z niego obliczamy prąd i_g płynący w przekątnej galwanometrycznej

$$i_g = \frac{I_M \cdot m \cdot n \cdot X}{X(m \cdot n + n + p) + (1+m)[n(1+m) + p(1+n)]} = C_i \cdot a .$$

Z otrzymanego wyrażenia można wyliczyć wartość

$$\lim_{X \to \infty} a = \frac{I_M}{C_i} \cdot \frac{m}{1+m+\frac{p}{n}} .$$

Ze wzoru na prąd w galwanometrze otrzymujemy po wykonaniu przekształceń następującą charakterystykę:

$$X = \frac{\left[(1+m)\dfrac{1+m+p \cdot \dfrac{1+n}{n}}{1+m+\dfrac{p}{n}}\right] \cdot a}{\left[\dfrac{I_M}{C_i} \dfrac{m}{1+m+\dfrac{p}{n}}\right] - a} .$$

Mianownik powyższego wyrażenia przyjmuje wartość zerową w przypadku, gdy $X \to \infty$; wynika to z porównania z poprzednio obliczonym $\lim\limits_{X \to \infty} \alpha$.

Porównując otrzymany wzór z ogólną charakterystyką (5) widzimy, że dla obecnie rozpatrzonego przypadku należy napisać

$$k = (1+m)\frac{1+m+p\cdot\frac{1+n}{n}}{1+m+\frac{p}{n}}, \qquad \alpha_\infty = \frac{I_M}{C_i}\cdot\frac{m}{1+m+\frac{p}{n}} \tag{9}$$

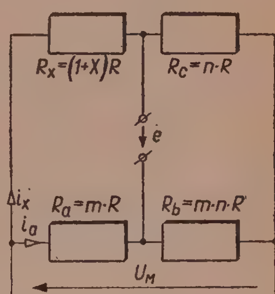
3. NIEZRÓWNOWAŻONY MOSTEK ZASILANY NIEZMIENNYM NAPIĘCIEM $U_M = \mathrm{const}\,(X)$

Podobnie jak w rozdziale poprzednim rozważania zostaną przeprowadzone zarówno dla przypadku, gdy układ jest wyposażony we wskaźnik typu napięciowego, jak i w alternatywie miernika prądowego. Założenia (3) i (4), dotyczące liniowości podziałki użytego przyrządu, pozostają nadal w mocy.

Układ ze wskaźnikiem napięciowym

Na rysunku 3 przedstawiono schemat ideowy, ważny dla omawianego przypadku. Opierając się na nim możemy napisać:

$$\left.\begin{aligned} i_x(R_x+R_c) &= U_M \\ i_a(R_a+R_b) &= U_M \\ i_x\cdot R_x - i_a\cdot R_a - e_g &= 0\,. \end{aligned}\right\}$$



Rys. 3. Schemat do układu ze wskaźnikiem napięciowym.

Wprowadzenie oznaczeń (1) pozwala ten układ równań przekształcić do postaci

$$\left.\begin{aligned} i_x(1+n+X) + i_a\cdot 0 \quad + e_g\cdot 0 &= \frac{U_M}{R} \\ i_x\cdot 0 \quad + i_a(1+n) + e_g\cdot 0 &= \frac{U_M}{m\cdot R} \\ i_x\cdot R\,(1+X) - i_a\cdot R\cdot m - e_g\cdot 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Poszukiwana wartość e_g daje się stąd obliczyć jako

$$e_g = \frac{U_M\cdot n\cdot X}{X(1+n)+(1+n)^2} = C_u\cdot\alpha\,.$$

Na podstawie powyższego wyrażenia można określić

$$\lim_{X\to\infty}\alpha = \frac{U_M}{C_u}\cdot\frac{n}{1+n}\,.$$

Dalsze przekształcenia wzoru na e_g prowadzą do otrzymania następującej charakterystyki mostka

$$X = \frac{[1+n] \cdot a}{\left[\frac{U_M}{C_u} \cdot \frac{n}{1+n}\right] - a}.$$

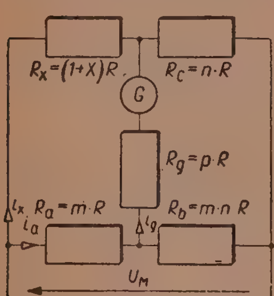
Mianownik ostatniej zależności osiąga zero w przypadku, gdy $X \to \infty$ — o czym świadczy poprzednio obliczona wartość granicy.

Uzyskane wyrażenie jest zgodne z ogólną postacią charakterystyki (5) przy przyjęciu poniższych oznaczeń:

$$k = (1+n), \qquad a_\infty = \frac{U_M}{C_u} \cdot \frac{n}{1+n} \tag{10}$$

Układ ze wskaźnikiem prądowym

Schemat ideowy rozpatrywanego przypadku (rys. 4), pozwala na ustalenie poniższych zależności:



Rys. 4. Schemat do układu ze wskaźnikiem prądowym.

$$\left.\begin{aligned} i_x \cdot R_x + (i_x + i_g)\, R_c &= U_M \\ i_a \cdot R_a + (i_a - i_g)\, R_b &= U_M \\ i_x \cdot R_x - i_a \cdot R_a - i_g \cdot R_g &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Przez wprowadzenie oznaczeń (1) można powyższe wyrażenia sprowadzić do postaci

$$\left.\begin{aligned} i_x (1+n+X) + i_a \cdot 0 \quad + i_g \cdot n &= \frac{U_M}{R} \\ i_x \cdot 0 \quad + i_a (1+n) - i_g \cdot n &= \frac{U_M}{m \cdot R} \\ i_x (1+X) \quad - i_a \cdot m \quad - i_g \cdot p &= 0 \end{aligned}\right|$$

Rozwiązanie tego układu równań względem prądu i_g w przekątnej galwanometrycznej daje zależność

$$i_g = \frac{\frac{U_M}{R} \cdot n \cdot X}{X\,[mn + n(1+n) + p(1+n)] + (1+n)\,[m \cdot n + n + p(1+n)]} = C_i \cdot a.$$

Z zależności tej obliczamy wartość

$$\lim_{X \to \infty} a = \frac{U_M}{C_i \cdot R} \cdot \frac{1}{1 + m + n + p\,\frac{1+n}{n}}.$$

Przekształcając dalej wyrażenie na prąd w galwanometrze dochodzimy do następującego rezultatu:

$$X = \frac{\left[(1+n)\dfrac{1+m+p\cdot\dfrac{1+n}{n}}{1+m+n+p\dfrac{1+n}{n}}\right]\cdot a}{\left[\dfrac{U_M}{C_i\cdot R}\cdot\dfrac{1}{1+m+n+p\dfrac{1+n}{n}}\right]-a}$$

Poprzednio obliczona wartość $\lim\limits_{X\to\infty} a$ wskazuje, że mianownik powyższego wyrażenia dąży do zera, gdy oporność badana rośnie do nieskończoności.

Otrzymana zależność odpowiada ogólnej charakterystyce (5) pod warunkiem przyjęcia oznaczeń

$$\left.\begin{aligned} k &= (1+n)\cdot\frac{1+m+p\dfrac{1+n}{n}}{1+m+n+p\dfrac{1+n}{n}} \\ a_\infty &= \frac{U_M}{C_i\cdot R}\cdot\frac{1}{1+m+n+p\dfrac{1+n}{n}} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

4. PRZEBIEG CHARAKTERYSTYKI NIEZRÓWNOWAŻONEGO MOSTKA

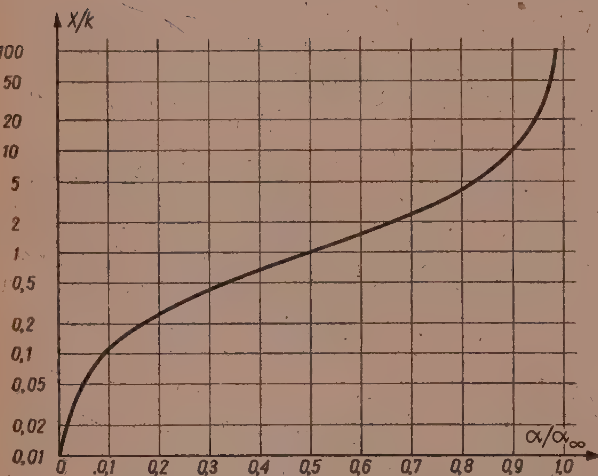
Rozważania przeprowadzone powyżej w rozdziałach 2 i 3 wskazują, że przebieg charakterystyki niezrównoważonego mostka Wheatstone'a daje się ująć analitycznie wzorami (5), (6) lub (7), posiadającymi ogólną ważność. Wyrażenia, reprezentowane przez symbole k i a_∞, są natomiast zależne od konkretnie istniejącego przypadku, to znaczy od charakteru zasilania i rodzaju wskaźnika.

Stosownie do tych uwag, można sporządzić najogólniejszą charakterystykę mostka w postaci zależności $X/k = f(a/a_\infty)$ w oparciu o wzór (6). Przebieg omawianej zależności ilustruje wykres na rys. 5 oraz wartości liczbowe podane w tabl. 1.

W praktyce i literaturze przyjmuje się często liniową zależność pomiędzy względnym rozstrojeniem mostka X a odchyleniem wskaźnika a. Wartości podane w tabl. 1 świadczą wyraźnie, że prowadzi to do znacznych błędów pomiaru, o ile $a/a_\infty \geqslant 0{,}04$. Przybliżenie takie jest natomiast całkowicie dopuszczalne dla $a/a_\infty < 0{,}005$.

Tablica 1
Ogólna charakterystyka
$X/k = f(a/a_\infty)$

a/a_∞	X/k
0	0
0,0001	0,000 100 0
0,0005	0,000 500 0
0,0010	0,001 001
0,0050	0,005 025
0,0100	0,010 10
0,0200	0,020 41
0,0400	0,041 67
0,0600	0,063 83
0,0800	0,086 96
0,1000	0,111 1
0,2000	0,250 0
0,3000	0,428 6
0,4000	0,666 7
0,5000	1,000
0,6000	1,500
0,7000	2,333
0,8000	4,000
0,8500	5,667
0,9000	9,000
0,9200	11,500
0,9400	15,667
0,9500	19,000
0,9600	24,000
0,9700	32,333
0,9800	49,000
0,9850	65,667
0,9900	99,000
0,9950	199,00
1	∞



Rys. 5. Ogólna charakterystyka mostka niezrównoważonego.

5. OPORNOŚĆ ZASTĘPCZA MOSTKA WIDZIANA OD STRONY ZACISKÓW ZASILANIA

Obliczenie oporności zastępczej mostka przebiega rozmaicie w zależności od oporu przekątnej galwanometrycznej. W związku z tym odrębnie musimy rozpatrzyć przypadek ze wskaźnikiem napięciowym — i przypadek z przyrządem o charakterze prądowym.

U k ł a d z e w s k a ź n i k i e m n a p i ę c i o w y m

Do przeprowadzenia obliczeń posługujemy się schematem ideowym przedstawionym na rys. 1. Przy uwzględnieniu oznaczeń (1) otrzymujemy

$$R_M = R \cdot m(1+n) \cdot \frac{X+(1+n)}{X+(1+m)(1+n)}.$$

W przypadku, gdy mostek jest w równowadze (tj. $X=0$) mamy

$$R_{M0}=R\cdot m\,\frac{1+n}{1+m}. \tag{12}$$

Względna zmiana oporności wejściowej mostka wyniesie zatem

$$\delta_{RM}=\frac{R_M-R_{M0}}{R_{M0}}=\frac{X\cdot m}{X+(1+m)(1+n)}. \tag{13}$$

Układ ze wskaźnikiem prądowym

Obliczenia opieramy na schemacie przedstawionym na rys. 2, posługując się również zależnościami (1). Po dokonaniu przekształceń (nieco bardziej złożonych niż poprzednio) dochodzimy do wzoru

$$R_M=R\cdot m\,\frac{X(m\cdot n+n+n^2+n\cdot p+p)+(1+n)(m\cdot n+n+n\cdot p+p)}{X(m\cdot n+n+p)+(1+m)(m\cdot n+n+n\cdot p+p)}.$$

Z powyższego wyrażenia wynika, że w stanie równowagi $R_{M0}=R\cdot m\dfrac{1+n}{1+m}$, a więc oporność wejściowa jest oczywiście taka sama jak w przypadku poprzednim.

Obliczamy obecnie względną zmianę oporności zastępczej i otrzymujemy

$$\delta_{RM}=\frac{X\cdot m}{X\dfrac{(1+n)(m\cdot n+n+p)}{m\cdot n+n+n\cdot p+p}+(1+m)(1+n)}. \tag{14}$$

Dla obliczeń technicznych można posługiwać się zależnością przybliżoną o znacznie prostszej postaci

$$\delta_{RM}=\frac{X\cdot m}{X(1+n)+(1+m)(1+n)} \tag{15}$$

6. REGULACJA I STABILIZACJA ZASILANIA MOSTKA

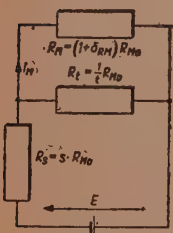
W praktyce pomiarowej bardzo często mostek jest zasilany ze źródeł elektrochemicznych, wykazujących opadanie siły elektromotorycznej i wzrost oporności wewnętrznej w miarę postępującego wyładowania. Układ pomiarowy powinien natomiast zachowywać stałą charakterystykę przynajmniej w pewnym obszarze wartości SEM źródła. Realizuje się to dzięki opornikom regulacyjnym, włączonym pomiędzy źródło i zaciski zasilania układu mostkowego.

Prócz tego natężenie lub napięcie zasilające mostek powinno być niezależne od jego rozstrojenia — zgodnie z założeniem, przy którym zostały wyprowadzone charakterystyki układu. Układ pośredniczący musi zatem spełniać i to wymaganie.

Układ zasilany niezmiennym natężeniem $I_M = \text{const}\ X$

Zbadamy zachowanie się układu przedstawionego schematycznie na rys. 6 przy zmianach oporności zastępczej mostka R_M. Wszystkie opory tego układu zostały przedstawione jako krotności oporności mostka w stanie równowagi R_{M0}.

Natężenie zasilające mostek wyraża się jako



Rys. 6. Schemat do układu zasilanego niezmiennym natężeniem.

$$I_M = \frac{E}{R_{M0}} \cdot \frac{1}{(1+s\cdot t)(1+\delta_{RM})+s}.$$

W stanie równowagi prąd pobierany przez mostek wynosi

$$I_{M0} = \frac{E}{R_{M0}} \cdot \frac{1}{1+s\cdot t+s}. \tag{16}$$

wobec czego względna zmiana natężenia zasilającego będzie równa

$$\delta_{IM} = \frac{I_M - I_{M0}}{I_{M0}} = -\frac{(1+s\cdot t)\,\delta_{RM}}{(1+s\cdot t)(1+\delta_{RM})+s}.$$

W przybliżeniu można napisać

$$\delta_{IM} \approx -\frac{\delta_{RM}}{1+\dfrac{s}{1+s\cdot t}}. \tag{17}$$

Stabilizacja zasilania będzie tym dokładniejsza, im większe będzie wyrażenie $\varkappa_I = 1+\dfrac{s}{1+s\cdot t}$. Widać zatem, że należy wybrać $t=0$ co oznacza, że opornik R_t jest w układzie zbędny — a nawet szkodliwy. Wartość współczynnika s wynika wówczas z zastosowanych E oraz I_{M0} według zależności

$$s = \frac{E}{I_{M0}\cdot R_{M0}} - 1 \tag{18}$$

Układ zasilany niezmiennym napięciem $U_M = \text{const}\ (X)$

Schemat obecnego układu przedstawia rys. 7. Podobnie jak w poprzednich rozważaniach — wszystkie opory zostały związane z wartością R_{M0}.

Napięcie na zaciskach źródłowych mostka wynosi

$$U_M = E\cdot\frac{(1+\delta_{RM})}{(1+s\cdot t)(1+\delta_{RM})+s}.$$

Dla mostka zrównoważonego

$$U_{M0} = E\cdot\frac{1}{1+s\cdot t+s}, \tag{19}$$

Opierając się na powyższym można obliczyć względną zmianę napięcia:

$$\delta_{UM} = \frac{U_M - U_{M0}}{U_{M0}} = \frac{s \cdot \delta_{RM}}{(1 + s \cdot t)(1 + \delta_{RM}) + s}.$$

Kosztem pewnego przybliżenia wzór ten możemy uprościć do postaci

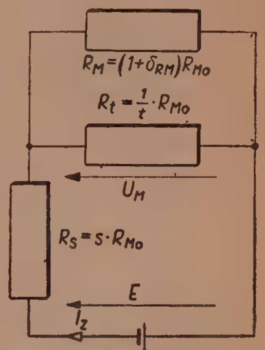
$$\delta_{UM} \approx \frac{\delta_{RM}}{1 + \frac{1}{s} + t}. \tag{20}$$

Jakość stabilizacji pozwala ocenić wyrażenie $\varkappa_U = 1 + \frac{1}{s} + t$. Widzimy, że dobrą stałość napięcia można osiągnąć stosując mały opornik R_t (tj. dużą wartość t) oraz mały opór R_s (mały współczynnik s). Z drugiej jednak strony należy pamiętać, iż mała wartość R_t powoduje znaczne zwiększenie obciążenia źródła, bowiem jego prąd wynosi

$$I_z = \frac{U_{M0}}{R_{M0}} \frac{1+t}{t}. \tag{21}$$

Współczynnik s określony jest warunkami regulacji według zależności

$$s = \frac{E - U_{M0}}{U_{M0}} \frac{t}{1+t}. \tag{22}$$



Rys. 7. Schemat do układu zasilanego niezmiennym napięciem.

7. ZAKOŃCZENIE

Przytoczone rozważania dowodzą, że charakterystyka niezrównoważonego mostka Wheatstone'a we wszystkich rozpatrzonych przypadkach daje się przedstawić za pomocą prostej zależności algebraicznej. Zależność ta ma charakter zdecydowanie nieliniowy poza odcinkiem początkowym, odpowiadającym małym wartościom względnego rozstrojenia X. Faktyczne zachowanie obliczonej charakterystyki wymaga przedsięwzięcia środków zabezpieczających stałość zasilania.

Teoria działania niezrównoważonego mostka Wheatstone'a nie jest na ogół w literaturze właściwie ujmowana. Niektóre dobre opracowania, jak np. [3], pomijają tę metodę zupełnym milczeniem. Inne źródła [1] zadowalają się krótkim omówieniem przybliżonej charakterystyki liniowej, nie podając jednak jej zakresu ważności. Prof. Karandiejew [2], wskazując na złożoność zagadnienia, doradza stosowanie nomograficznej metody Skalskiego. Naszym zdaniem metoda ta nie jest bardzo prosta i w dodatku obarczona uchybami rzędu $(2 \ldots 3) \cdot 10^{-2}$ — co oczywiście stanowi

dość poważny mankament. Stosunkowo najdokładniej zajmuje się tym zagadnieniem Turiczin [4]. Podane przez niego wzory wykazują jednak dość złożoną postać, a po wykonaniu uproszczeń ważne są tylko dla mostka o układzie symetrycznym.

Zasadniczą zaletą rozważań przedstawionych w niniejszej pracy jest dokładność, ogólność i stosunkowo prosta forma otrzymanych wyników.

Wyższa Szkoła Marynarki Wojennej

WYKAZ LITERATURY

1. Friemkie A. W.: *Elektriczeskije izmierenija — Obszczyj kurs*, Gosenergoizdat, Moskwa—Leningrad, 1954.
2. Karandiejew K. B.: *Mietody elektriczeskich izmierenij* (diffierencjalnyje, mostowyje i kompensacjonnyje), Gosenergoizdat, Moskwa—Leningrad, 1952.
3. Schwerdtfeger W.: *Technika pomiarów elektrycznych*, t. 1, PWT, Warszawa, 1952.
4. Turiczin A. M.: *Elektriczeskije izmierenija nieelektriczeskich wieliczin*, Gosenergoizdat, Moskwa—Leningrad, 1954.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО МОСТА УИТСТОНА

Неуравновешенный мост Уитстона имеет четыре различные варианта. Он может действовать при питании током или напряжением не зависящим от значения измеряемого сопротивления R_x. В качестве указательного прибора может быть применён прибор реагирующий на напряжение или на ток. К первому типу причисляем автоматические потенциометры, злектронные измерители и осциллографы, имеющие большое входное сопротивление. Отклонение этих приборов пропорционально разности потенциалов, они не потребляют тока из измерительной схемы. Приборами токового типа являются гальванометры, милливольтметры и осциллографические шлейфы, отклонении которых зависит от протекающего через них тока.

Во 2 пункте рассмотрен мост питаемый постоянным током, сначала с измерителем первого типа, а затем с токовым. Пункт 3 посвящён мосту питаемому постоянным напряжением с указателем чувствительным к напряжению и к току. Получаем общие формулы (5), (6) и (7) — где величины k и a_∞ являются выражениями зависимыми от данного случая.

Ток или напряжение питания на зажимах моста проявляет тенденцию к изменению, в зависимости от значения измеряемого сопротивления. В статье выведена формула для эквивалентного сопротивления моста на зажимах питания R_{M0} в состоянии равновесия. Далее в пункте 5 выведены формулы для релятивного изменения этого сопротивления δ_{RM} при мосте с измерителем первого типа и токовым. В пункте 6 исследовано влияние сопротивлений находящихся между источником и мостом R_s и R_t на относительное изменение питающего тока, формула (17), или напряжения δ_{uM} с учетом необходимости регулировки при изменениях ЭДС источника.

Таблица I и чертёж на рис. 5 иллюстрируют вид общей характеристики моста, которая не прямолинейна.

EIGENSCHAFTEN DER UNABGEGLICHENEN WHEATSTONE-BRÜCKE

Die unabgeglichene Wheatstone-Brücke besitzt vier Hauptabarten. Sie kann entweder mit dem von der Grösse des Prüflings R_x unabhängigen Strom oder Spannung gespeist werden. Anderseits kann ein Anzeigeinstrument der Spannung- oder Stromtype angewendet werden. Als spannungsempfindliche Instrumente werden selbsttätige Kompensatoren, so wie elektronische Messinstrumente und Oszillographen mit hohem Eingangswiderstand gemeint. Die Ablenkung dieser Instrumente ist von dem Spannungsunterschied abhängig, wobei sie keinen nennenswerten Strom von der Messschaltung entnehmen. Als stromempfindliche Instrumente bezeichnen wir Galvanometer, Millivoltmeter und oszillographische Schleifen, derer Ablenkung vom durchfliessenden Strom abhängt.

Im 2. Absatz wurde die mit konstantem Strom gespeiste Brücke erstens mit einem Spannungsinstrument und nachher mit einem stromempfindlichen behandelt. Der Absatz 3 ist der mit konstanter Spannung gespeisten Brücke mit Spannungs- und Stromanzeigeinstrument gewidmet. Es wurden die allgemein gültigen Formeln (5), (6) und (7) erhalten, wobei k und a_∞ vom entsprechenden Fall abhängig sind.

Der Speisestrom oder die Speisespannung hängen in gewissem Grade vom Wert des Prüflings ab. Es wurden Formeln für den Ersatzwiderstand der Brücke an den Speisungsklemmen beim Gleichgewicht R_{M_0} abgeleitet. Ferner wurden Formeln für die relative Änderung dieses Widerstandes δ_{RM} bei einer Brücke mit Spannungs oder Stromanzeigeinstrument angegeben. Im Absatz 6 ist der Einfluss der Widerstände R_s und R_t (zwischen der Quelle und der Brücke auf die relative Änderung des Stromes δ_{IM} (6) bzw. der Spannung δ_{UM} (6), bei Bezugnahme der Anpassung zur EMK Quelle, untersucht worden.

Die Tafel 1 und Zeichnung 5 geben den Verlauf der allgemeinen Charakteristik der Brücke, die nicht linear ist, an.

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI
TOM X ZESZYT 1 1961

621.317.733

J. SAWICKI

Skalowanie i dokładność mostka odchyłowego

Rękopis dostarczono 3. 2. 1960 r.

W artykule rozważono podstawowe problemy związane ze skalowaniem odchyłowego (czyli niezrównoważonego) mostka Wheatstone'a. Opracowano mianowicie empiryczny sposób wyznaczania analitycznej postaci charakterystyki układu i rozpatrzono warunki uzyskania możliwie dobrej dokładności takiego skalowania.

Praca zawiera również dyskusję dokładności pomiaru mostkiem odchyłowym. W dalszym ciągu omówiono zakres pomiaru z zadaną dokładnością przy określonych uchybach skalowania układu. Wykazano, że przy wymaganiu dobrej dokładności zakres ten jest niezbyt szeroki i określono czynniki wpływające na jego rozpiętość.

WSTĘP

Literatura omawiająca problemy odchyłowego mostka Wheatstone'a nie jest zbyt obfita i wyczerpująca. W szczególności nie znajduje w niej wystarczającego odbicia zagadnienie skalowania i dokładności pomiaru rozpatrywanego układu. Jest to luka dość dotkliwa, jeżeli zważyć znaczne rozpowszechnienie tej metody w pomiarach wielkości nieelektrycznych (jak np. temperatury).

Skalowanie układu mostka odchyłowego polega na ustaleniu liczbowej zależności oporności mierzonej R_x od odchylenia α wskaźnika. Charakterystyka $R_x=f(\alpha)$ może być określona na drodze analitycznej lub empirycznej. Pierwszy z tych sposobów wymaga znajomości wartości oporów mostka oraz stałej prądowej lub napięciowej użytego wskaźnika i jego oporności wewnętrznej. Trzeba również znać napięcie lub natężenie zasilające układ. Ustalenie niektórych spośród tych parametrów może nastręczać pewne trudności w przypadku, gdy mamy do czynienia z gotowym (fabrycznym) mostkiem.

Podczas pracy w terenie (tj. poza laboratorium) zdarza się niekiedy, że nie ma możliwości dotrzymania przepisowych parametrów zasilania — a pomiary muszą być wykonane. Prawidłowe ustalenie wyników wymaga wówczas przeskalowania układu dla istniejących warunków — względnie dokonania przeliczeń, w oparciu o znaną charakterystykę w warunkach normalnych.

Skalowanie mostka o charakterystyce praktycznie prostoliniowej jest łatwe. Sprawa ta przedstawia się znacznie trudniej w przypadku wyraźnej nieliniowości, co np. trafia się dość często w mostkach do termometrii oporowej. Wyznacza się wówczas zwykle cały szereg wartości R_x odpowiadających poszczególnym punktom podziałki wskaźnika i sporządza krzywą skalowania układu. Posługiwanie się nią nie zawsze jest jednak wygodne i nie zapewnia na ogół znacznej dokładności pomiaru. W przypadku zmiany parametrów zasilania — cały zabieg musi być wykonany powtórnie.

Analityczna postać charakterystyki mostka, wyznaczona np. na drodze empirycznej, daje się łatwo przystosować do zmienionych warunków zasilania. Potrzebna jest tylko znajomość stosunku napięć lub natężeń — albo jednej wartości oporu badanego, odpowiadającej określonemu odchyleniu wskaźnika.

W pracy tej rozpatrzono empiryczne wyznaczenie analitycznej postaci charakterystyki w celu uzyskania możliwie prostych wzorów o ważności ogólnej. W dalszym ciągu zbadano warunki osiągnięcia dobrej dokładności skalowania i określono jego uchyby. W końcowym punkcie przeanalizowano zagadnienie dokładności pomiaru przy użyciu niezrównoważonego mostka Wheatstone'a oraz rozpatrzono kwestię zakresu wartości oporu badanego, dających się zmierzyć z założoną dokładnością. Zakres ten okazał się dość wąski, co należy mieć na uwadze zarówno przy projektowaniu, jak i użytkowaniu układu. Mostek posiada tę przewagę nad miernikiem ilorazowym, że możliwa jest łatwa zmiana zakresu pomiarowego przy zachowaniu dotychczasowej charakterystyki i dokładności.

2. WYPROWADZENIE ZALEŻNOŚCI DLA SKALOWANIA

Analityczna postać charakterystyki mostka, zgodnie z rozważaniami przedstawionymi w [1], daje się sformułować jako

$$R_x = R(1+X), \tag{1}$$

przy czym względne rozstrojenie mostka X wyraża się następująco:

$$X = \frac{k \cdot a}{a_\infty - a}. \tag{2}$$

We wzorze (1) R oznacza taką wartość oporu mierzonego, przy której mostek znajduje się w stanie równowagi; k jest współczynnikiem stałym, zależnym od stosunków oporów mostka i galwanometru do oporności odniesienia R. Odchylenie graniczne a_∞ zależy od tych samych czynników, co współczynnik k oraz od wartości prądu lub napięcia zasilania i stałej wskaźnika — a w niektórych przypadkach również od oporności odniesienia.

Dla określonego mostka współczynnik k jest wartością bezwzględnie stałą, natomiast odchylenie graniczne α_∞ jest proporcjonalne do napięcia lub natężenia zasilającego. W związku z tym skalowanie układu musi się odbywać w tych samych warunkach zasilania co właściwy pomiar — i to przy spełnionym założeniu $U_M = \text{const}\ (X)$ lub $I_M = \text{const}\ (X)$.

Empiryczne wyznaczenie analitycznej postaci charakterystyki mostka wymaga zatem określenia trzech niewiadomych: R, k i α_∞. Do tego celu niezbędne są trzy pary wartości oporu mierzonego i odpowiadającego mu odchylenia wskaźnika. Oznaczamy je odpowiednio przez R_1, α_1; R_2, α_2; R_3, α_3.

Stosownie do powyższego można zatem napisać:

$$R_1 = R\ (1 + X_1)$$
$$R_2 = R\ (1 + X_2)$$
$$R_3 = R\ (1 + X_3)$$

i obliczyć wartość

$$\frac{R_3 - R_1}{R_2 - R_1} = \frac{X_3 - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{\alpha_\infty - \alpha_2}{\alpha_\infty - \alpha_3} \cdot \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{3}$$

Wprowadzamy oznaczenia pomocnicze

$$\lambda = \frac{R_3 - R_1}{\alpha_3 - \alpha_1} \qquad \mu = \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \tag{4}$$

i po podstawieniu ich do (3) otrzymujemy

$$\frac{\alpha_\infty - \alpha_2}{\alpha_\infty - \alpha_3} = \frac{\lambda}{\mu}, \text{ a stąd } \alpha_\infty = \frac{\alpha_3 \cdot \lambda - \alpha_2 \cdot \mu}{\lambda - \mu}. \tag{5}$$

Z równań wyjściowych wynika, że zachodzi zależność

$$\frac{R_3}{1 + X_3} = \frac{R_2}{1 + X_2} \text{ czyli } X_3 \cdot R_2 - X_2 \cdot R_3 = R_3 - R_2. \tag{6}$$

W oparciu o wzory (2) i (5) możemy obliczyć

$$X_3 = k \cdot \frac{\alpha_3 (\lambda - \mu)}{\mu (\alpha_3 - \alpha_2)} \text{ oraz } X_2 = k \cdot \frac{\alpha_2 (\lambda - \mu)}{\lambda (\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Po podstawieniu tych wyrażeń do (6) otrzymujemy

$$k = \frac{\lambda \cdot \mu (R_3 - R_2) \cdot (\alpha_3 - \alpha_2)}{(\lambda - \mu)(R_2 \cdot \lambda \cdot \alpha_3 - R_3 \cdot \mu \cdot \alpha_2)}. \tag{7}$$

Opierając się na wyznaczonych wartościach odchylenia granicznego (5) i współczynnika (7) możemy wyznaczyć

$$1 + X_1 = \frac{(R_3 - R_2)(\alpha_3 - \alpha_2)\,\alpha_1 \cdot \lambda \cdot \mu + (R_2 \lambda \alpha_3 - R_3 \mu \alpha_2)\,[\lambda(\alpha_3 - \alpha_1) - \mu(\alpha_2 - \alpha_1)]}{(R_2 \lambda \alpha_3 - R_3 \mu \alpha_2)\,[\lambda(\alpha_3 - \alpha_1) - \mu(\alpha_2 - \alpha_1)]}.$$

Po dokonaniu przekształceń matematycznych otrzymujemy wyrażenie

$$1+X_1=\frac{(\mu\cdot a_2-\lambda\cdot a_3)\,[R_3\cdot\mu\cdot(a_2-a_1)-R_2\cdot\lambda\cdot(a_3-a_1)]}{[\lambda\cdot(a_3-a_1)-\mu\cdot(a_2-a_1)]\,(R_2\cdot\lambda\cdot a_3-R_3\cdot\mu\cdot a_2)}\,.$$

Wobec powyższego wartość R określimy jako

$$R=R_1\cdot\frac{[\lambda\,(a_3-a_1)-\mu\,(a_2-a_1)]\,(R_2\cdot\lambda\cdot a_3-R_3\cdot\mu\cdot a_2)}{(a_3\cdot\lambda-a_2\cdot\mu)\,[R_2\cdot\lambda\,(a_3-a_1)-R_3\cdot\mu\,(a_2-a_1)]}\,. \tag{8}$$

Otrzymane zależności (5), (7) i (8) mają postać zbyt złożoną, by nadawały się do szybkiego wykonywania obliczeń. W pierwszym rzędzie dążymy do zmniejszenia ilości rozmaitych wyrażeń, występujących we wzorach. W tym celu podstawiamy

$$a_3\cdot\lambda-a_2\cdot\mu=\lambda\,(a_3-a_1)-\mu\,(a_2-a_1)+a_1\,(\lambda-\mu)\qquad\text{oraz}$$

$$R_2\cdot\lambda\cdot a_3-R_3\cdot\mu\cdot a_2=R_2\cdot\lambda\,(a_3-a_1)-R_3\cdot\mu\,(a_2-a_1)+a_1\,(R_2\cdot\lambda-R_3\cdot\mu)\,.$$

Oprócz tego należy zauważyć, że zachodzi związek

$$\frac{\lambda\cdot\mu\,(R_3-R_2)\,(a_3-a_2)}{(\lambda-\mu)\,(R_3\cdot\mu-R_2\cdot\lambda)}=\frac{\lambda\,(a_3-a_1)-\mu\,(a_2-a_1)}{\lambda-\mu}+\frac{R_2\cdot\lambda\,(a_3-a_1)-R_3\cdot\mu\,(a_2-a_1)}{R_3\cdot\mu-R_2\cdot\lambda}\,.$$

Po uwzględnieniu powyższego otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$a_\infty=a_1+\frac{\lambda\,(a_3-a_1)-\mu\,(a_2-a_1)}{\lambda-\mu} \tag{9}$$

$$k=\frac{\dfrac{\lambda\cdot\mu\,(R_3-R_2)\,(a_3-a_2)}{(\lambda-\mu)\,(R_3\cdot\mu-R_2\cdot\lambda)}}{\dfrac{R_2\cdot\lambda\,(a_3-a_1)-R_3\cdot\mu\,(a_2-a_1)}{R_3\cdot\mu-R_2\cdot\lambda}-a_1}=$$

$$=\frac{\dfrac{R_2\cdot\lambda\,(a_3-a_1)-R_3\cdot\mu\,(a_2-a_1)}{R_3\cdot\mu-R_2\cdot\lambda}+\dfrac{\lambda\,(a_3-a_1)-\mu\,(a_2-a_1)}{\lambda-\mu}}{\dfrac{R_2\cdot\lambda\,(a_3-a_1)-R_3\cdot\mu\,(a_2-a_1)}{R_3\cdot\mu-R_2\cdot\lambda}-a_1} \tag{10}$$

$$R=R_1\cdot\frac{1-a_1\dfrac{R_3\cdot\mu-R_2\cdot\lambda}{R_2\cdot\lambda\,(a_3-a_1)-R_3\cdot\mu\,(a_2-a_1)}}{1+a_1\dfrac{\lambda-\mu}{\lambda\,(a_3-a_1)-\mu\,(a_2-a_1)}}\,. \tag{11}$$

Spostrzegamy, że we wzorach (9), (10) i (11) występują tylko dwa wyrażenia złożone. Dla krótkości oznaczymy je przez

$$a_r=\frac{\lambda\,(a_3-a_1)-\mu\,(a_2-a_1)}{\lambda-\mu} \tag{12}$$

$$\alpha_s = \frac{R_2 \cdot \lambda(\alpha_3 - \alpha_1) - R_3 \cdot \mu(\alpha_2 - \alpha_1)}{R_2 \cdot \mu - R_2 \cdot \lambda} \tag{13}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń (12) i (13) do wzorów na α_∞, k i R otrzymujemy wyrażenia dla tych wielkości w bardzo uproszczonej formie, a mianowicie:

$$\alpha_\infty = \alpha_1 + \alpha_r \tag{14}$$

$$k = \frac{\alpha_s + \alpha_r}{\alpha_s - \alpha_1} \tag{15}$$

$$R = R_1 \frac{1 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_s}}{1 + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_r}} \tag{16}$$

Odchylenia pomocnicze α_r i α_s zdefiniowane zależnościami (12) i (13) mają postać niezbyt prostą, gdyż wyznaczenie ich wartości wymaga poprzedniego obliczenia współczynników λ i μ. Usunięcie jednak tych parametrów nie prowadzi do komplikacji wyrażeń dla odchyleń pomocniczych. Przyjmują one bowiem postać

$$\alpha_r = \frac{[(R_3 - R_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)]}{[(R_3 - R_1)(\alpha_2 - \alpha_1)] - [(R_2 - R_1)(\alpha_3 - \alpha_1)]} \tag{17}$$

$$\alpha_s = \frac{R_1 [(R_3 - R_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)]}{R_3 [(R_2 - R_1)(\alpha_3 - \alpha_1)] - R_2 [(R_3 - R_1)(\alpha_2 - \alpha_1)]}. \tag{18}$$

Dzięki wprowadzeniu nawiasów prostokątnych uwidocznione zostało podobieństwo konstrukcji wzorów na α_r i α_s.

3. DOBÓR WARUNKÓW I UCHYB SKALOWANIA

Wzory (14) ÷ (18), wyprowadzone w poprzednim punkcie, mają ważność ogólną. Obecnie zostanie rozpatrzony dobór warunków skalowania w celu uzyskania możliwie dobrej dokładności.

Pierwszym warunkiem uzyskania dobrej dokładności jest $\alpha_1 = 0$ tj. $R_1 = R$. Oznacza to mianowcie bezpośrednie określenie oporności odniesienia R. Przyjmując to założenie wprowadzimy jednocześnie następujące oznaczenia:

$$R_3 - R = r_3, \quad R_2 - R = r_2, \quad \alpha_2/\alpha_3 = \sigma \tag{19}$$

i otrzymamy nową postać wzorów (17) i (18):

$$\alpha_r = \alpha_3 \frac{(r_3 - r_2)\sigma}{r_3 \cdot \sigma - r_2} = \alpha_\infty, \tag{20}$$

$$\alpha_s = \frac{R(r_3 - r_2)\alpha_3 \cdot \sigma}{R_3 \cdot r_2 - R_2 \cdot r_3 \cdot \sigma}.$$

Powyższe wyrażenia na α_r i α_s pozwalają obliczyć wartość k przy obecnych założeniach jako

$$k = \frac{\alpha_s + \alpha_r}{\alpha_s} = \frac{r_2 \cdot r_3 (1-\sigma)}{R (r_3 \cdot \sigma - r_2)} \tag{21}$$

Opierając się na wyrażeniu (20) obliczymy uchyb systematyczny odchylenia granicznego α_∞ według metodyki cytowanej w [2]. Wyznaczamy:

$$\frac{\partial \alpha_\infty}{\partial \alpha_3} \cdot \frac{\alpha_3}{\alpha_\infty} = 1 ;$$

$$\frac{\partial \alpha_\infty}{\partial \sigma} \cdot \frac{\sigma}{\alpha_\infty} = - \frac{r_2}{r_3 \cdot \sigma - r_2} ;$$

$$\frac{\partial \alpha_\infty}{\partial r_2} \cdot \frac{r_2}{\alpha_\infty} = \frac{r_2 \cdot r_3 (1-\sigma)}{(r_3 - r_2)(r_3 \cdot \sigma - r_2)} ;$$

$$\frac{\partial \alpha_\infty}{\partial r_3} \cdot \frac{r_3}{\alpha_\infty} = - \frac{r_2 \cdot r_3 (1-\sigma)}{(r_3 - r_2)(r_3 \cdot \sigma - r_2)}$$

Korzystając z ogólnej postaci charakterystyki mostka oraz definicji (19) można napisać, że

$$r_3 = R \cdot k \frac{\alpha_3}{\alpha_\infty - \alpha_3} , \qquad r_2 = R \cdot k \frac{\alpha_3 \cdot \sigma}{\alpha_\infty - \alpha_3 \cdot \sigma} .$$

Wobec tego

$$\frac{r_2}{r_3 \cdot \sigma - r_2} = \frac{\alpha_\infty - \alpha_3}{\alpha_3 (1-\sigma)} ;$$

oraz

$$\frac{r_2 \cdot r_3 (1-\sigma)}{(r_3 - r_2)(r_3 \cdot \sigma - r_2)} = \frac{(\alpha_\infty - \alpha_3)(\alpha_\infty - \alpha_3 \cdot \sigma)}{\alpha_\infty \cdot \alpha_3 (1-\sigma)} .$$

Uchyb systematyczny odchylenia granicznego wyraża się zatem jako

$$[\delta_{(\alpha_\infty)}]^2 = [\delta_{(\alpha_3)}]^2 + \left[\frac{\alpha_\infty - \alpha_3}{\alpha_3 (1-\sigma)} \cdot \delta_{(\sigma)} \right]^2 + \left[\frac{(\alpha_\infty - \alpha_3)(\alpha_\infty - \alpha_3 \cdot \sigma)}{\alpha_\infty \cdot \alpha_3 (1-\sigma)} \right]^2 \{ [\delta_{(r_3)}]^2 + [\delta_{(r_2)}]^2 \} .$$

Wzór ten można uprościć przyjmując, że $\alpha_\infty \gg \alpha_3$ oraz

$$[\delta_{(r_3)}]^2 \approx [\delta_{(r_2)}]^2 = [\delta_{(r)}]^2 \tag{22}$$

$$[\delta_{(\sigma)}]^2 = [\delta_{(\alpha_2)}]^2 + [\delta_{(\alpha_3)}]^2 = \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} \right) [\delta_{(\alpha_3)}]^2 \approx \left[\frac{1-\sigma}{\sigma} \right]^2 [\delta_{(\alpha_3)}]^2 . \tag{23}$$

Zgodnie z powyższym mamy obecnie

$$[\delta_{(\alpha_\infty)}]^2 \approx \left[1 + \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha_3 \cdot \sigma} \right)^2 \right] [\delta_{(\alpha_3)}]^2 + 2 \left[\frac{\alpha_\infty}{\alpha_3 (1-\sigma)} \right]^2 [\delta_{(r)}]^2 .$$

Z powyższego wzoru wynika, że należy stosować możliwie dużą wartość odchylenia a_3 — to znaczy maksymalną dla użytego wskaźnika a_m. Stosunek odchylenia granicznego do maksymalnego oznaczymy przez

$$\beta = a_\infty / a_m . \tag{24}$$

Wskaźnik β jest jedną z pomocniczych charakterystyk danego układu pomiarowego i normalnie ma wartość znacznie większą od jedności, co pozwala na dalsze uproszczenie poprzedniego wyrażenia na uchyb.

Chcąc wyznaczyć optymalną wartość σ (czyli inaczej a_2) wprowadzamy powiązanie

$$[\delta_{(r)}]^2 = \varrho^2 [\delta_{(a_m)}]^2 . \tag{25}$$

Po uwzględnieniu powyższych podstawień i uwag, badany uchyb wyraża się jako

$$[\delta_{(a_\infty)}]^2 \approx \beta^2 [\delta_{(a_m)}]^2 \left[\frac{1}{\sigma^2} + \frac{2 \cdot \varrho^2}{(1-\sigma)^2} \right] = \beta^2 [\delta_{(a_m)}]^2 \cdot W .$$

Wyznaczenie $W_{\min}$ pozwala określić najkorzystniejszą wartość σ_0.

$$\frac{dW}{d\sigma} = 2 \cdot \frac{2 \cdot \varrho^2 \cdot \sigma^3 - (1-\sigma)^3}{\sigma^3 (1-\sigma)^3} \quad \text{a stąd } \sigma_0 = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2 \cdot \varrho^2}} ,$$

Ponieważ dla $\sigma \leqslant \sigma_0$ jest $\frac{dW}{d\sigma} \leqslant 0$, a dla $\sigma \geqslant \sigma_0$ $\frac{dW}{d\sigma} \geqslant 0$ — mamy dla $\sigma = \sigma_0$ poszukiwane minimum, którego wartość wynosi

$$W_{\min} = (1 + \sqrt[3]{2 \cdot \varrho^2})^3 .$$

W praktyce jest zwykle $\frac{1}{2} \leqslant \varrho \leqslant 1$, wobec czego $0{,}56 \geqslant \sigma_0 \geqslant 0{,}44$. Widać zatem, że można przyjąć orientacyjnie $\sigma_0 \approx \frac{1}{2}$ $\left(\text{tj. } a_2 = \frac{1}{2} a_m\right)$, a wówczas

$$[\delta_{(a_\infty)}]^2 \approx 8 \cdot \beta^2 [\delta_{(a_m)}]^2 \tag{26}$$

Obecnie wyznaczymy uchyb systematyczny współczynnika k, opierając się na zależności (21). Obliczamy kolejno

$$\frac{\partial k}{\partial R} \cdot \frac{R}{k} = 1 ,$$

$$\frac{\partial k}{\partial \sigma} \cdot \frac{\sigma}{k} = - \frac{\sigma (r_3 - r_2)}{(1-\sigma)(r_3 \cdot \sigma - r_2)} = - \frac{a_\infty}{a_3 (1-\sigma)} ,$$

$$\frac{\partial k}{\partial r_2} \cdot \frac{r_2}{k} = \frac{r_3 \cdot \sigma}{r_3 \cdot \sigma - r_2} ,$$

$$\frac{\partial k}{\partial r_3} \cdot \frac{r_3}{k} = - \frac{r_2}{r_3 \cdot \sigma - r_2} .$$

Dwa końcowe wyrażenia dają się uprościć przez zastosowanie tych samych podstawień dla wartości r_3 i r_2, które wykorzystaliśmy przy badaniu uchybu odchylenia granicznego α_∞. Otrzymujemy:

$$\frac{r_3 \cdot \sigma}{r_3 \cdot \sigma - r_2} = \frac{\alpha_\infty - \alpha_3 \cdot \sigma}{\alpha_3 (1-\sigma)},$$

$$\frac{r_2}{r_3 \cdot \sigma - r_2} = \frac{\alpha_\infty - \alpha_3}{\alpha_3 (1-\sigma)}.$$

Uchyb systematyczny współczynnika k wyraża się zatem jako

$$[\delta_{(k)}]^2 = [\delta_{(R)}]^2 + \left[\frac{\alpha_\infty}{\alpha_3 (1-\sigma)}\right]^2 [\delta_{(\sigma)}]^2 + \left[\frac{\alpha_\infty - \alpha_3 \cdot \sigma}{\alpha_3 (1-\sigma)}\right]^2 [\delta_{(r_2)}]^2 + \left[\frac{\alpha_\infty - \alpha_3}{\alpha_3 (1-\sigma)}\right]^2 [\delta_{(r_3)}]^2.$$

Biorąc pod uwagę zależności (22) i (23) oraz fakt, $\alpha_\infty \gg \alpha_3$ — wzór powyższy upraszczamy do postaci

$$[\delta_{(k)}]^2 \approx [\delta_{(R)}]^2 + \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha_3 \cdot \sigma}\right)^2 [\delta_{(\alpha_3)}]^2 + 2\left[\frac{\alpha_\infty}{\alpha_3 (1-\sigma)^2}\right]^2 [\delta_{(r)}]^2.$$

Powyższe wyrażenie wykazuje, że — podobnie jak w poprzednich rozważaniach — należy wybrać $\alpha_3 = \alpha_m$. Uchyb systematyczny oporu "R" można tutaj pominąć, gdyż jest on znacznie mniejszy od uchybu wychylenia. Zgodnie z powyższym i po wprowadzeniu wskaźnika β według definicji (24) oraz ϱ według (25) możemy napisać:

$$[\delta_{(k)}]^2 \approx \beta^2 [\delta_{(\alpha_m)}]^2 \left[\frac{1}{\sigma^2} + \frac{2 \cdot \varrho^2}{(1-\sigma)}\right] \approx [\delta_{(\alpha_\infty)}]^2.$$

Otrzymane wyrażenie pozwala wysnuć wniosek, że względny uchyb systematyczny współczynnika k jest w przybliżeniu taki sam, jak uchyb odchylenia granicznego α_∞. Warunki uzyskania dobrej dokładności obu wielkości są również jednakowe i dają się ująć w postaci końcowej

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot \alpha_m, \quad \alpha_3 = \alpha_m \\ [\delta_{(\alpha_\infty)}]^2 \approx [\delta_{(k)}]^2 \approx 8 \cdot \beta^2 \cdot [\delta_{(\alpha_m)}]^2 \\ \alpha_\infty = \alpha_m \frac{r_3 - r_2}{r_3 - 2 \cdot r_2}, \quad k = \frac{r_2 \cdot r_3}{R (r_3 - 2 \cdot r_2)} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

4. DOKŁADNOŚĆ POMIARU

Miarą dokładności pomiaru w rozpatrywanym układzie jest wartość uchybu systematycznego oporu badanego R_x. Uchyb ten wyznaczymy na podstawie analitycznej postaci charakterystyki mostka, określonej równaniami (1) i (2). Zgodnie z (1) obliczamy:

$$\frac{\partial R_x}{\partial R} \cdot \frac{R}{R_x} = 1 ,$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial X} \cdot \frac{X}{R_x} = \frac{X}{1+X} \approx X ,$$

$$[\delta_{(R_x)}]^2 \approx [\delta_{(R)}]^2 + X^2 [\delta_{(X)}]^2 . \tag{28}$$

Zależność (2) pozwala nam wyznaczyć uchyb względnego rozstrojenia X

$$\frac{\partial X}{\partial k} \cdot \frac{k}{X} = 1 ,$$

$$\frac{\partial X}{\partial a_\infty} \cdot \frac{a_\infty}{X} = -\frac{a_\infty}{a_\infty - a} \approx -1 ,$$

$$\frac{\partial X}{\partial a} \cdot \frac{a}{X} = \frac{a_\infty}{a_\infty - a} \approx 1 ,$$

$$[\delta_{(X)}]^2 \approx [\delta_{(k)}]^2 + [\delta_{(a_\infty)}]^2 + [\delta_{(a)}]^2 .$$

Uchyby współczynnika k oraz odchylenia granicznego a_∞ rozpatrzono poprzednio w punkcie 3. Otrzymane tam wyrażenie (27) podstawimy do ostatniego wzoru, uwzględniając jednocześnie, że

$$[\delta_{(a)}]^2 = \left(\frac{a_m}{a}\right)^2 [\delta_{(a_m)}]^2 .$$

Obecnie możemy napisać

$$[\delta_{(X)}]^2 \approx [\delta_{(a_m)}]^2 \left[16 \cdot \beta^2 + \left(\frac{a_m}{a}\right)^2\right] . \tag{29}$$

Czynnik $(a_m/a)^2$ we wzorze (29) ma wpływ pomijalnie mały (por. [3]), o ile $\beta \geqslant 5$ oraz $a/a_m \geqslant 0{,}2$. W przypadku takim otrzymujemy wyrażenie

$$[\delta_{(R_x)}]^2 \approx [\delta_{(R)}]^2 + [4 \cdot \beta \cdot \varkappa \cdot 10^{-2} \cdot X]^2 , \tag{30}$$

gdzie $\varkappa$ oznacza klasę dokładności użytego wskaźnika.

Wzór (30) pozwala określić granice zakresu X_{extr} względnego rozstrojenia mostka, w których będzie zachowana założona dokładność pomiaru. Przyjmujemy, że uchyb oporu odniesienia R wynosi $\pm 1 \cdot 10^{-3}$, co odpowiada przeciętnie dobremu skalowaniu. Zakładając różne wartości dopuszczalnego uchybu pomiaru oporności badanej R_x otrzymujemy zależności:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{dla } |\delta_{(R_x)}| \leqslant 10 \cdot 10^{-3} & |x_{\mathrm{extr}}| \approx \dfrac{250}{\beta \cdot \varkappa} \cdot 10^{-3} \\[2ex] \text{dla } |\delta_{(R_x)}| \leqslant 5 \cdot 10^{-3} & |x_{\mathrm{extr}}| \approx \dfrac{120}{\beta \cdot \varkappa} \cdot 10^{-3} \\[2ex] \text{dla } |\delta_{(R_x)}| \leqslant 2 \cdot 10^{-3} & |x_{\mathrm{extr}}| \approx \dfrac{45}{\beta \cdot \varkappa} \cdot 10^{-3} \end{array}\right\} \tag{31}$$

Powyższe wyrażenia dają dobry pogląd na zakres pomiaru mostkiem odchyłowym przy założonej dokładności.

5. ZAKOŃCZENIE

Z przytoczonych rozważań wynika, że dokładność pomiaru niezrównoważonym (czyli odchyłowym) mostkiem Wheatstone'a zależy w wielkiej mierze od właściwego skalowania. Optymalne warunki tego zabiegu przedstawiają zależności (27). Dla danego układu — pomiar jest tym dokładniejszy, im oporność mierzona jest bliższa oporowi odniesienia, to znaczy — im bliższy równowagi jest mostek. Zakres wartości R_x, mierzonych z założoną dokładnością, jest dość wąski; należy o tym pamiętać zarówno przy projektowaniu układu jak i przy wykonywaniu pomiarów, gdyż uchyb narasta dość szybko po przekroczeniu wartości X_{extr}.

Wyższa Szkoła Marynarki Wojennej

WYKAZ LITERATURY

1. Sawicki J.: *Właściwości niezrównoważonego mostka Wheatstone'a* Arch. Elektrot. t. X zesz. I, Warszawa, 1961.
2. Sawicki J.: *Skompensowany mostek Wheatstone'a,* Arch. Elektrot. t. VII, zesz. 3, Warszawa, 1958.
3. Trzetrzewiński S.: Dokładność pomiarów elektrycznych *Elektryczne metody pomiarowe w produkcji, laboratorium i dydaktyce.* Materiały na sesję naukową organizowaną przez Polit. Wrocławską 12, 13 i 14 grudnia 1952 r. t. II, cz. 3.

ГРАДУИРОВАНИЕ И ТОЧНОСТЬ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО МОСТА

Аналитическая форма характеристики неуравновешенного моста представлена в статье [1]. Предлагаемая ныне статья дает метод нахождения значений R, k и α_∞ на основании трех наблюдений (R_1 и α_1, R_2 и α, R_3 и α_3). Для определения этих параметров нужно определить расчетные отклонения α_r по формуле (17) и α_s по — (18), а полученные результаты подставить в формулы (14), (15) и (16).

Самую лучшую точность градуирования получаем при удовлетворении требований (27). В этом пункте были одновременно приведены упрощённые формулы для величин α_∞ и κ и формулы для их погрешностей. Символы r_2 и r_3 дефинированы формулами (19), а β в (24). α_m — максимальное отклонение указательного прибора.

Погрешность измерения для градуированного таким образом моста указана приближенно формулой (30), в которой $\varkappa$ обозначает класс точности указательного прибора. Приняв погрешность сопротивления R равной $\pm 1\cdot 10^{-3}$ получаем для различных допускаемых значений $\delta_{(Rx)}$ разные пределы измерения $-|X_{\mathrm{extr}}| \leqslant X \leqslant +|X_{\mathrm{extr}}|$ по формуле (31).

Вполне удовлетворительную точность измерения получаем в сравнительно узком интервале значений R_x. Этот интервал может быть однако легко передвинут при сохранении тех же характеристик и точности. Эта возможность, равно как и лучшая точность, являются преимуществом неуравновешенного моста в сравнении с логометром.

EICHUNG UND GENAUIGKEIT DER UNABGEGLICHENEN BRÜCKE

Die analytische Form der Charakteristik der unabgeglichenen Brücke wurde im Aufsatz [1] aufgefasst. Der vorliegende Aufsatz gibt eine Methode zur Bestimmung der Werte R, k und α_∞ auf Grund der drei Beobachtungen (R_1 und α_1, R_2 und α_2, R_3 und α_3) an. Zur Berechnung dieser Parameter werden die Hilfsablenkungen α_r nach (17) und α_s nach (18), bestimmt. Die erhaltenen Resultate setz man in die Formeln (14), (15) und (16) ein.

Die beste Genauigkeit der Eichung erhalten wir bei der Erfüllung der Bedingungen (27). Es wurden dort die vereinfachten Formeln für die Grössen α_∞ und k, so wie auch für ihre Fehler angegeben. Die Symbole r_2 und r_3 sind in den Formeln (19) und β in (24), definiert worden. α_m stellt die maximale Ablenkung des benutzten Instrumentes dar.

Die angenäherte Formel (30) erfasst den Fehler der Messung bei der Benutzung einer so geeicheneter Brücke. Das Symbol $\varkappa$ bezeichnet die Genauigkeitsklasse des gebrauchten Instrumentes. Vorausgesetzt, dass der Fehler des Widerstandes $R = \pm 1 \cdot 10^{-3}$ ist, erhalten wir für verschiedene zulassige Werte der $\delta_{(R_x)}$ ebenfalls verschiedene Messbereiche

$$-|X_{\text{extr}}| \leqslant X \leqslant +|X_{\text{extr}}|,$$

die den Formeln (31) entsprechen.

Eine gute Messgenauigkeit erhält man in einem begrenzten Bereich der Prüflingswerte. Dieser Bereich kann aber leicht verschoben werden bei der Beibehaltung derselben Charakteristik und Genauigkeit. Diese Tatsache, wie auch die bessere Genauigkeit, bilden gerade die Überlegenheit der unabgeglichenen Brücke im Vergleich zu dem Kreuzspulinstrument.

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM X ZESZYT 1 1961

621.396.616:621.316.8:621.315.592

E. KUŻMA

Wytwarzanie autooscylacji za pomocą termistorów

Rękopis dostarczono 8. 4. 1960

Rozpatrzono zagadnienie wytwarzania oscylacyjnych drgań samopodtrzymujących się za pomocą termistora. Usystematyzowano i omówiono pokrótce podstawowe parametry i charakterystyki termistora. Wyprowadzono elektryczny układ zastępczy termistora spolaryzowanego oraz wyznaczono jego impedancję dla przebiegów sinusoidalnych. Przeanalizowano warunki jakie musi spełnić obwód z termistorem by stać się generatorem oraz wyprowadzono wzory na częstotliwość wytwarzanych drgań. Omówiono ponadto wpływ zmian parametrów termistora poprzez zmiany temperatury otoczenia i napięcia zasilającego na częstotliwość wytwarzanych drgań. Otrzymane wyniki sprawdzono doświadczalnie w konkretnych układach.

1. WSTĘP

Dzięki swej bezwładności cieplnej termistor w pewnych warunkach może być zastąpiony przez równoważny układ elektryczny składający się z indukcyjności i oporności ujemnej.

Wykorzystując tę właściwość termistora można otrzymać w określonym układzie elektrycznym drgania sinusoidalne o częstotliwości zależnej od parametrów termistora i układu, przy czym górna granica częstotliwości nie przekracza paru herców.

Tak powolne drgania elektryczne potrzebne są do badań elektrycznych i mechanicznych serwomechanizmów, do badań bardzo powolnych drgań w liniach przesyłowych itp.

Rozmiary elementów obwodów oscylacyjnych dla klasycznych generatorów bardzo powolnych drgań są zwykle bardzo duże. Np. generator LC drgań o częstotliwości 0,005 Hz powinien mieć $L=10000$ H i $C\approx$ ≈ 100000 μF, a oscylacyjny obwód generatora termistorowego składać się będzie z kondensatora o pojemności tylko 30 μF i termistora o wymiarach rzędu centymetra. Zmniejszenie gabarytu obwodu oraz uniknięcie kosztownych cewek indukcyjnych o tak dużej indukcyjności stanowią wielką zaletę generatorów termistorowych. Do wad natomiast należy zaliczyć ich mniejszą stałość częstotliwości.

Piśmiennictwo dotyczące generatorów termistorowych jest bardzo skąpe [8], [14] i dotyczy raczej wyników eksperymentalnych.

2. PODSTAWOWE PARAMETRY I CHARAKTERYSTYKI TERMISTORA

2.1. Zależność oporności od temperatury

Przebieg oporności termistora w funkcji temperatury bezwzględnej T wyraża z dostateczną dokładnością wzór

$$R = A \exp\left(\frac{B}{T}\right), \tag{1}$$

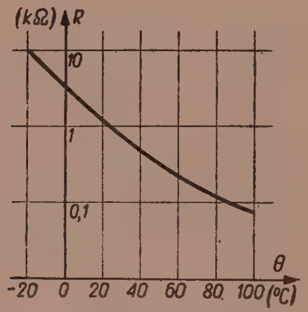
w którym A jest wielkością stałą, B zaś oznacza tzw. stałą materiałową termistora.

Zazwyczaj wzór ten przedstawia się w następującej wygodniejszej postaci

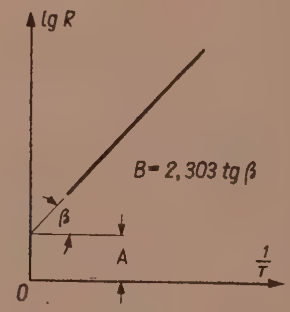
$$R = R_1 \exp\left[B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right)\right]. \tag{2}$$

R_1 oznacza tu oporność termistora w pewnej temperaturze Θ_1 (°C), której odpowiada temperatura T_1 (°K).

Zależność $R = f(\Theta)$ jest więc funkcją wykładniczą (rys. 1); natomiast wykres równania (1) we współrzędnych $\lg R$, $\frac{1}{T}$ jest linią prostą o współczynniku kątowym nachylenia proporcjonalnym do stałej materiałowej B (rys. 2).



Rys. 1. Zmiany oporności termistora w funkcji temperatury.



Rys. 2. Przebieg zależności $\lg R = f\left(\frac{1}{T}\right)$ wg. wzoru (1).

2.2. Współczynnik temperaturowy oporności

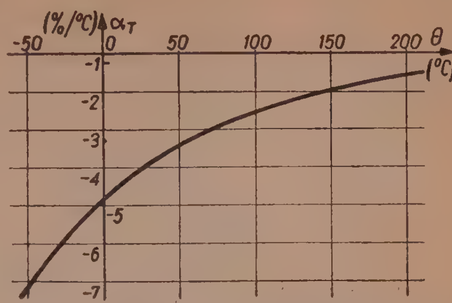
Współczynnik temperaturowy oporności termistora α_T określa się jako

$$\alpha_T = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} \tag{3}$$

i wyraża się, po uwzględnieniu wzoru (1), zależnością

$$\alpha_T = -\frac{B}{T^2}. \qquad (4)$$

Wartość współczynnika temperaturowego oporności zależy od temperatury, dla której został wyznaczony; im niższa temperatura, tym większe (co do wartości bezwzględnej) α_T (rys. 3).



Rys. 3. Zależność współczynnika temperaturowego oporności od temperatury.

W katalogach podawane jest zwykle α_T dla temperatury 25°C (tabl. 1).

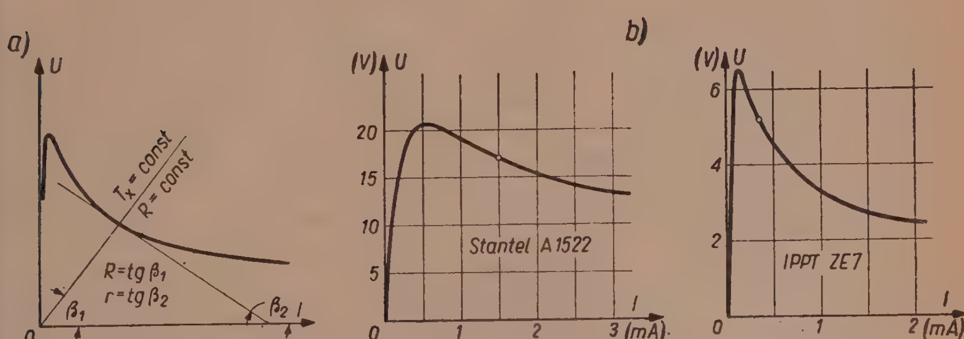
Tablica 1

Dane termistorów krajowych mogących służyć do generacji drgań elektrycznych

Oznaczenie	R_{25} (kΩ)	B (°K)	α_{25} (%/°C)	K (mW/°C)	τ (sek)	P_{max} (mW)
ZE7	0,47...2000	3200...4180	—3,6...—4,7	0,02...0,2	1	3...20
ZE6	0,8... 4	3200	—3,6	0,09...0,2	2	12...30
ZE1	0,1...20	3200...4180	—3,6...—4,7	8	100	900

2.3. Charakterystyka statyczna napięciowo-prądowa

Charakterystyka statyczna napięciowo-prądowa termistora określa zależność pomiędzy spadkiem napięcia U na termistorze i prądem I w sta-



Rys. 4. Charakterystyki statyczne napięciowo-prądowe termistorów a) — charakterystyka ogólna, b) — charakterystyki termistorów użytych do wytwarzania drgań.

nie ustalonym (rys. 4). Nieliniowość tej charakterystyki jest cechą wtórną wywołaną nagrzewaniem się termistora. Gdyby umieścić termistor

w idealnych warunkach, w których ciepło w nim wydzielone byłoby natychmiast odprowadzane tak, że wszystkie punkty termistora miałyby stałą temperaturę niezależną od wartości płynącego prądu, wtedy charakterystyka $U=f\ (I)$ przebiegałaby podobnie jak dla opornika o oporności praktycznie niezależnej od temperatury, czyli byłaby linią prostą.

2.4. Oporność statyczna

Każdemu punktowi charakterystyki statycznej napięciowo-prądowej przyporządkowana jest określona oporność statyczna termistora

$$R=\frac{U}{I} \tag{5}$$

i odpowiadająca jej temperatura termistora T. W liniowym układzie współrzędnych linie stałej oporności statycznej, będące równocześnie charakterystykami izotermicznymi termistora, przedstawione są pękiem prostych o wspólnym początku: $U=0$, $I=0$ nachylonych do osi odciętych (rys. 4) pod kątem

$$\beta_1=\operatorname{arc\,tg} R\,. \tag{6}$$

Wszystkim punktom charakterystyk statycznych napięciowo-prądowych leżących na danej charakterystyce izotermicznej odpowiada oczywiście taki sam przyrost temperatury termistora T_x ponad temperaturę otaczającego środowiska T_0

$$T_x=T-T_0\,. \tag{7}$$

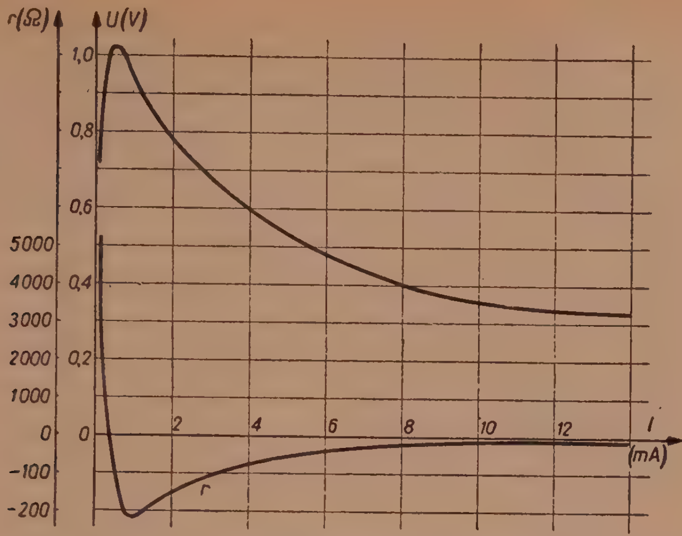
2.5. Oporność przyrostowa

Oporność przyrostowa termistora r, zwana także opornością dynamiczną, określona jest jako

$$r=\frac{dU}{dI}\,. \tag{8}$$

W interpretacji graficznej jest ona równa (po uwzględnieniu skali na obu osiach układu współrzędnych) wartości tangensa kąta β_2 nachylenia stycznej do charakterystyki $U=f\,(I)$ w punkcie, w którym zostaje wyznaczona (rys. 4).

Wartość oporności przyrostowej zależna jest od położenia punktu pracy: r jest dodatnie przed punktem szczytowym charakterystyki $U=f\,(I)$, przechodzi przez zero w tym punkcie i osiąga wartości ujemne poza nim (rys. 5).

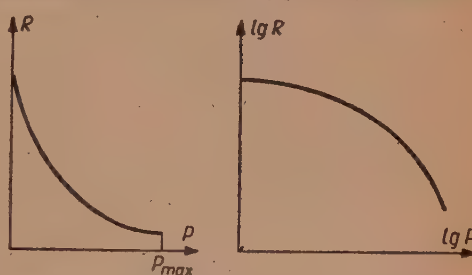


Rys. 5. Przebieg oporności przyrostowej wzdłuż charakterystyki $U=f(I)$.

2.6. Charakterystyka opornościowo-mocowa

Charakterystyka opornościowo-mocowa termistora (rys. 6) określa zależność pomiędzy opornością termistora R w stanie ustalonym i mocą P wydzieloną w termistorze.

W początkowej swej części, tj. dla obciążenia $P \to 0$, przebieg charakterystyki $R=f(P)$ dąży asymptotycznie do wartości oporności termistora nie obciążonego [10]. Końcowy punkt tej charakterystyki określa największe dopuszczalne obciążenie termistora P_{max}.



Rys. 6. Charakterystyki opornościowo-mocowe termistora.

2.7. Współczynniki: mocowy oporności i dynamiczności

Współczynnik mocowy oporności określony jest jako

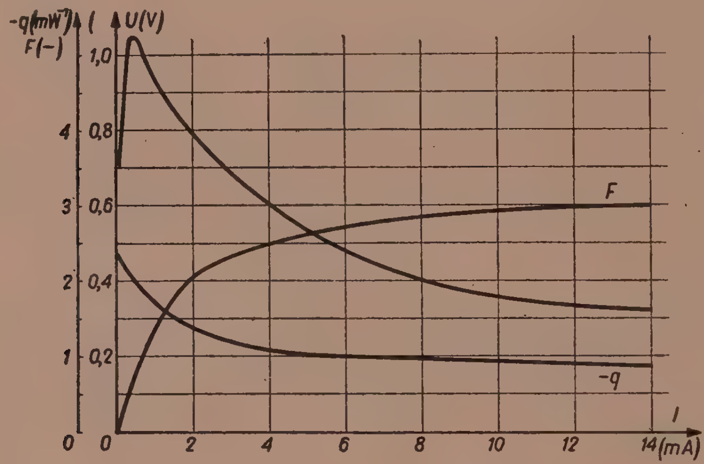
$$q=\frac{1}{R}\,\frac{dR}{dP} \tag{9}$$

i przedstawia sobą względny przyrost oporności termistora $\frac{\Delta R}{R}$ przy zmianie obciążenia o ΔP, gdy $\Delta P \to 0$.

Często zamiast współczynnika mocowego oporności podaje się inną wielkość, zwaną współczynnikiem dynamiczności [1]

$$F = -\frac{\frac{dR}{R}}{\frac{dP}{P}} = -\frac{P}{R}\,\frac{dR}{dP} = -P\cdot q\,. \tag{10}$$

Przykładowy przebieg wartości tych współczynników wzdłuż charakterystyki $U = f(I)$ przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7. Przebieg współczynnika mocowego oporności i współczynnika dynamiczności wzdłuż charakterystyki $U = f(I)$.

Pomiędzy współczynnikiem dynamiczności i opornościami: statyczną i przyrostową termistora istnieje następujące powiązanie

$$F = \frac{R - r}{R + r}\,, \tag{11}$$

w którym wartości oporności odnoszą się do punktu charakterystyki, dla którego wyznacza się F.

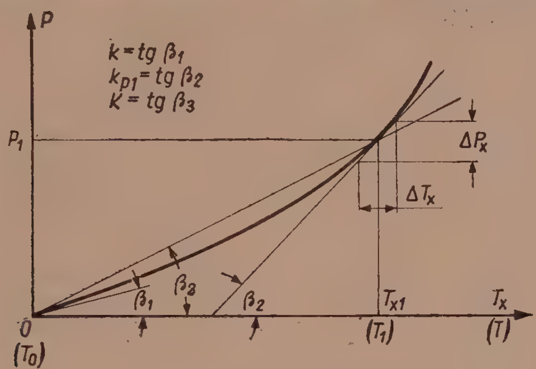
2.8. Współczynnik strat

W ustalonym stanie pracy moc elektryczna P dostarczona do termistora równa jest mocy N oddanej w postaci ciepła przez termistor otoczeniu, a przyrost temperatury termistora T_x jest proporcjonalny do przyrostu jego obciążenia P_x

$$T_x \doteq P_x\,. \tag{12}$$

Odwrotność współczynnika proporcjonalności w zależności (12) nazwano współczynnikiem strat termistora, który określa ilość energii oddanej przez termistor otoczeniu w ciągu jednej sekundy przy różnicy temperatur T_x równej jednemu stopniowi Celsjusza.

Ze względu na nieliniowy przebieg zależności $T_x = f(P)$ (rys. 8) pojęcie współczynnika strat termistora nie jest pojęciem jednoznacznym;



Rys. 8. Charakterystyka temperaturowo-mocowa termistora.

w zależności od warunków początkowych obejmuje ono jedno z trzech następujących określeń:

$$k = \lim_{T \to T_0} \frac{\Delta P}{T - T_0} = \left.\frac{dP}{dT}\right|_{T=T_0}, \tag{13}$$

$$k_P = \lim_{T \to T_1} \frac{\Delta P_x}{T - T_1} = \left.\frac{dP}{dT}\right|_{T=T_1}, \tag{14}$$

$$K = \frac{P}{T_x} = \frac{P}{T - T_0}. \tag{15}$$

W prostoliniowym zakresie przebiegu $T_x = f(P)$ wartości podanych współczynników są identyczne. Natomiast przy pracy na nieliniowym zakresie charakterystyki temperaturowo-mocowej $T_x = f(P)$ należy pojęcie to wyraźnie określić.

2.9. Analityczne wyrażenie charakterystyki opornościowo-mocowej

W prostoliniowym zakresie przebiegu $T_x = f(P)$ zależność oporności termistora od obciążenia można wyrazić wzorem

$$R = A \exp\left(\frac{BK}{P + KT_0}\right), \tag{16}$$

w którym A jest wielkością stałą (tak jak w równaniu (1)).

Wzór (16) może być stosowany także dla nieliniowego zakresu charakterystyki $T_x = f(P)$ jednak każdej wartości mocy P_n będzie odpowiadać inna wartość współczynnika strat K określona z równania (15).

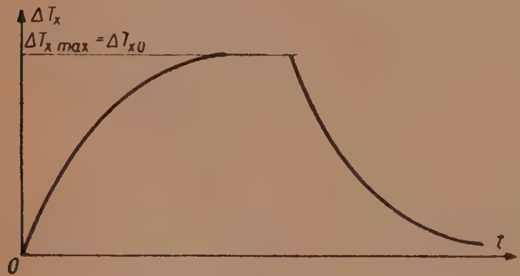
2.10. Stała czasowa termistora

Bilans energetyczny termistora określony jest przez prawo chłodzenia (nagrzewania) Newtona

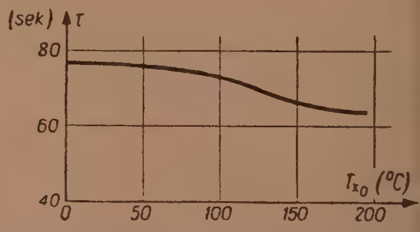
$$\Delta P dt = H d(\Delta T_x) + k_p (\Delta T_x) dt. \tag{17}$$

Energia prądu elektrycznego $\Delta P dt$ dostarczona do termistora równa jest sumie energii $Hd(\Delta T_x)$ powodującej nagrzanie się termistora i energii $k_p(\Delta T_x)dt$ oddanej przez termistor otoczeniu. W (17) H oznacza pojemność cieplną termistora, ΔT_x — różnicę temperatur pomiędzy temperaturą termistora w danej chwili t i jego temperaturą początkową [11].

Przebieg obniżania (narastania) temperatury termistora jest, według (17), przebiegiem wykładniczym (rys. 9):



Rys. 9. Przebiegi nagrzewania się i ostygania termistora.



Rys. 10. Zależność stałej czasowej od temperatury początkowej termistora.

dla chłodzenia

$$\Delta T_x = \Delta T_{x0}\, e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{18}$$

dla grzania

$$\Delta T_x = \Delta T_{x\,max}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{19}$$

Wielkość τ występującą w (18) i (19) równą ilorazowi pojemności cieplnej i współczynnika strat

$$\tau = \frac{H}{k_p} \tag{20}$$

nazwano cieplną stałą czasową termistora. Oznacza ona okres czasu liczony od chwili zmiany obciążenia termistora do chwili, w której różnica temperatur ΔT_x wyniesie 0,63 $\Delta T_{x\,max}$.

Należy zaznaczyć, że wartość stałej czasowej jest zależna w pewnym stopniu od wartości początkowej temperatury termistora (rys. 10).

2. 11. Podstawowe równanie termistora

Podstawowym równaniem termistora nazwano równanie bilansu mocy, otrzymane z prawa Newtona (wzór 17)

$$\Delta P = \tau \frac{d(k_p \Delta T_x)}{dt} + k_p \Delta T_x = \tau \frac{d(\Delta N)}{dt} + \Delta N. \tag{21}$$

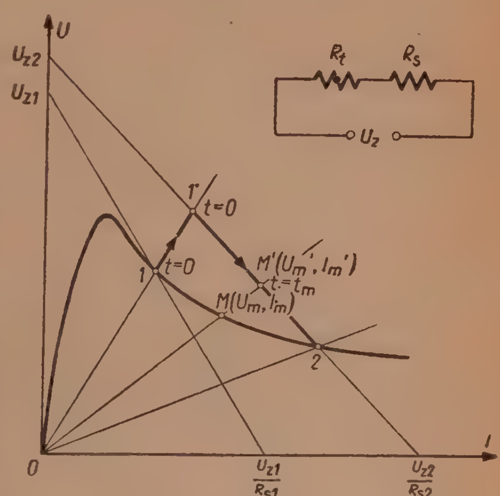
Moc elektryczna ΔP dostarczona do termistora równa jest mocy $\tau \frac{d(\Delta N)}{dt}$ zużytej na nagrzanie termistora i mocy ΔN oddanej przez termistor otoczeniu.

W stanie ustalonym $\frac{d(\Delta N)}{dt} = 0$, a moc dostarczona do termistora równa się mocy oddanej otoczeniu.

Równanie to stanowi punkt wyjściowy przy wyznaczaniu wszelkich przebiegów procesów przejściowych w termistorze.

2. 12. Charakterystyka dynamiczna napięciowo-prądowa

Charakterystyka dynamiczna napięciowo-prądowa termistora odnosi się do okresu pracy termistora zwanego stanem przejściowym. Jej przebieg związany jest ściśle z układem elektrycznym, w którym znajduje się termistor. Np. dla układu z rys. 11 przy nagłej zmianie napięcia zasilającego U_z i oporności R_s z wartości U_{z1} i R_{s1} do wartości U_{z2} i R_{s2} charakterystyka dynamiczna przedstawiona jest linią łamaną *1—1'—2* mającą początek w punkcie *1*, koniec zaś w punkcie *2* charakterystyki statycznej $U = f(I)$ (rys. 11).



Rys. 11. Charakterystyka dynamiczna napięciowo-prądowa termistora dla przypadku $U_{z1} \to U_{z2}$, $R_{s1} \to R_{s2}$.

Dla dowolnej chwili $t = t_m > 0$ dynamiczny punkt pracy będzie znajdować się w punkcie M' odcinka *1'—2*. W chwili tej moc dostarczona do termistora wynosi

$$P_m = U_m' \cdot I_m', \tag{22}$$

moc zaś oddana przez termistor otoczeniu jest równa

$$N_m = U_m I_m , \tag{23}$$

przy czym $P_m > N_m$.

Czas t_m odpowiadający położeniu dynamicznego punktu pracy w punkcie M można wyznaczyć z podstawowego równania termistora jako

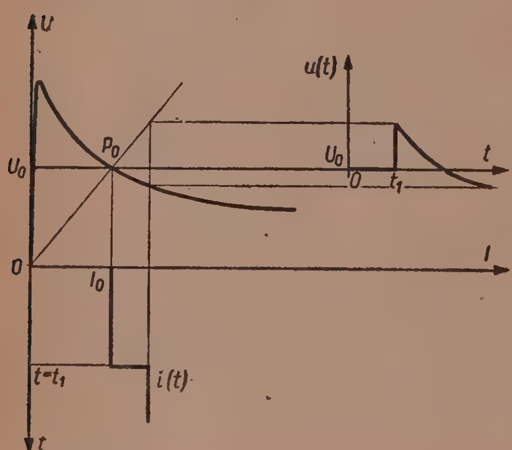
$$t_m = \int_{N_1}^{N_m} \frac{\tau}{P-N} dN . \tag{24}$$

Na podstawie charakterystyki dynamicznej i wzoru (24) wyznacza się przebiegi ustalania się prądu płynącego przez termistor $I=f(t)$, spadku napięcia na termistorze $U=f(t)$ oraz oporności termistora $R=f(t)$.

3. UKŁAD ZASTĘPCZY TERMISTORA SPOLARYZOWANEGO

3.1. Określenie termistora spolaryzowanego

Termistorem spolaryzowanym nazwano termistor obciążony stałą wartością prądu elektrycznego I_0. Statyczny punkt pracy (rys. 12) określony jest wtedy tą wartością prądu i spadkiem napięcia U_0 na termistorze. W punkcie tym przykładany jest zmienny przebieg elektryczny $i(t)$ lub $u(t)$ o stosunkowo niewielkiej amplitudzie.



Rys. 12. Praca termistora spolaryzowanego.

Termistor nieobciążony składową stałą można traktować jako szczególny przypadek termistora spolaryzowanego, gdy $I_0 \to 0$.

3.2. Określenie problemu

Układem zastępczym termistora nazwano taki dwójnik elektryczny, który posiada te same właściwości elektryczne co i termistor.

Podstawą przy wyznaczaniu układu zastępczego jest równanie bilansu mocy (21), które można przedstawić jako

$$\frac{1}{\tau}(N-P) + \frac{dN}{dt} = 0 , \tag{25}$$

przy czym

$$N = N_0 + \Delta N , \qquad P = P_0 + \Delta P . \tag{26}$$

Zarówno moc P dostarczona do termistora, jak i moc N oddana przez termistor otoczeniu w dowolnej chwili t są funkcjami chwilowych wartości prądu i napięcia na termistorze

$$P=f_1[U(t), I(t)], \quad N=f_2[U(t), I(t)]. \tag{27}$$

Podstawowe równanie termistora można więc przedstawić jako

$$\Phi[U(t), I(t)]+\frac{d}{dt}\psi[U(t), I(t)]=0. \tag{28}$$

Kształt przebiegów czasowych $U(t)$ i $I(t)$ oraz ich wzajemne powiązania wynikają z analizy układu elektrycznego, w którym termistor znajduje się. Najogólniej powiązanie to wyraża następująca zależność [4]

$$f\left[U(t), I(t); \frac{dU(t)}{dt}, \frac{d^2U(t)}{dt^2}, \ldots \frac{d^nU(t)}{dt^n}, \ldots; \frac{dI(t)}{dt}, \frac{d^2I(t)}{dt^2}, \ldots \frac{d^nI(t)}{dt^n}, \ldots\right]=0. \tag{29}$$

Rozwiązanie równań (28) i (29) zezwoliłoby w zupełności na określenie właściwości układu z termistorem przy dowolnych warunkach początkowych oraz na wyznaczenie elektrycznego układu zastępczego termistora. Jednakże rozwiązanie jest bardzo trudne i nie zawsze wykonalne.

3.3. Wyznaczanie układu zastępczego termistora spolaryzowanego

Przy termistorze spolaryzowanym napięcie i prąd wyrażają się jako

$$U(t)=U_0+u(t), \quad I(t)=I_0+i(t), \tag{30}$$

gdzie $u(t)$ i $i(t)$ oznaczają zmienne przebiegi napięcia i prądu nałożone na składową stałą określającą statyczny punkt pracy.

Podstawiając te wartości do (28) otrzymuje się równanie

$$\Phi[U_0+u(t), I_0+i(t)]+\frac{d}{dt}\Psi[U_0+u(t), I_0+i(t)]=0, \tag{31}$$

które można doprowadzić (patrz Dodatek 1) do postaci

$$\left(\Phi_U+\frac{d}{dt}\Psi_U\right)\cdot u(t)+\left(\Phi_I+\frac{d}{dt}\Psi_I\right)i(t)+\Phi_0+\xi=0. \tag{32}$$

Jeżeli, znajdzie się taką postać dwójnika elektrycznego, dla którego związek pomiędzy napięciem i prądem będzie wyrażony równaniem (32). wtedy dwójnik ten można traktować jako układ zastępczy termistora

spolaryzowanego. Warunek taki spełnia, między innymi, obwód przedstawiony na rys. 13, dla którego zależność pomiędzy napięciem i prądem przedstawia się jako

$$r \cdot i(t) + \frac{R}{R-r} L \frac{di(t)}{dt} - u(t) - \frac{1}{R-r} L \frac{du(t)}{dt} = E . \tag{33}$$

Łatwo jest bowiem zauważyć, że równanie bilansu cieplnego termistora (wzór 32) i równanie dwójnika (wzór 33) mogą być przedstawione w następujących podobnych postaciach.

$$\left(1 + \frac{d}{dt} \frac{L}{R-r}\right) \cdot u(t) - \left(r + \frac{d}{dt} L \frac{R}{R-r}\right) \cdot i(t) + E = 0 \tag{34}$$

i

$$\left(1 + \frac{d}{dt} \frac{\Psi_U}{\Phi_U}\right) \cdot u(t) + \left(\frac{\Phi_I}{\Phi_U} + \frac{d}{dt} \frac{\Psi_I}{\Psi_U}\right) \cdot i(t) + \frac{\Phi_0 + \xi}{\Phi_U} = 0 . \tag{35}$$

Oba równania będą identyczne, jeżeli

$$\frac{L}{R-r} = \frac{\Psi_U}{\Phi_U}, \quad r = -\frac{\Phi_I}{\Phi_U}, \quad R = -\frac{\Psi_I}{\Psi_U}, \quad E = \frac{\Phi_0 + \xi}{\Phi_U} . \tag{36}$$

Parametry układu zastępczego termistora są więc równe:
— oporności

$$R = -\frac{\Psi_I}{\Psi_U}, \quad r = -\frac{\Phi_I}{\Phi_U}, \tag{37}$$

— indukcyjność

$$L = \frac{\Phi_I \Psi_U - \Phi_U \Psi_I}{\Phi_U^2}, \tag{38}$$

— siła elektromotoryczna

$$E = \frac{\Phi_0 + \xi}{\Phi_U}, \tag{39}$$

— elektryczna stała czasowa

$$\tau_e = \frac{\Psi_U}{\Phi_U} . \tag{40}$$

Siła elektromotoryczna E jest funkcją czasu i wynika z nieliniowości roboczego odcinka charakterystyki $U=f(I)$. Jej wartość zależy więc także od wielkości amplitud zmiennych przebiegów $u(t)$ i $i(t)$. W przypadku gdy amplitudy te będą wystarczająco małe, zagadnienie nieliniowości może być pominięte i termistor można przedstawić za pomocą

układu zastępczego o elementach liniowych tak, jak na rys. 14. Ta właśnie postać układu zastępczego stanowi podstawę do dalszych rozważań.

Z porównania zależności (25) i (28) wynika, że funkcje Φ i Ψ są

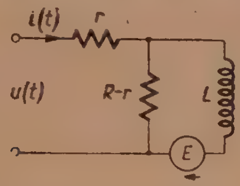
$$\Phi=\frac{1}{\tau}(N-P), \tag{41}$$

$$\Psi=N. \tag{42}$$

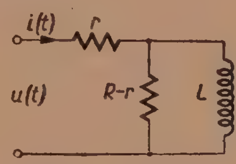
W statycznym punkcie pracy, tj. przy braku zmiennego sygnału moc oddana otoczeniu jest równa mocy dostarczonej, czyli

$$\Phi_0=0, \quad \Psi_0=P_0. \tag{43}$$

Uwzględniając (41) i (42) wyznacza się (patrz Dodatek 2) wartości wielkości Φ_U, Φ_I, Ψ_U, i Ψ_I, a następnie na podstawie wzorów (37 ... 40) — wartości elementów układu zastępczego.



Rys. 13. Układ zastępczy termistora spolaryzowanego.



Rys. 14. Układ zastępczy termistora spolaryzowanego dla przebiegów o małych amplitudach.

A więc oporność R (wzór 37) jest równa statycznej oporności termistora. I dalej, oporność r jest równa oporności przyrostowej termistora w statycznym punkcie pracy

$$\left.\begin{aligned} R&=R_0\\ r&=r_0. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Indukcyjność (wzór 38) wyniesie

$$L=(R_0-r_0)\,\tau_e, \tag{45}$$

zaś elektryczna stała czasowa (wzór 40) będzie równa

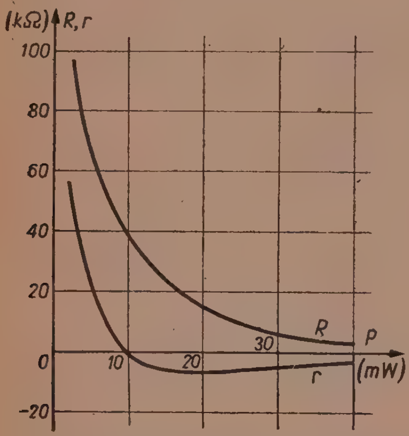
$$\tau_e=\frac{\tau}{1-q_0P_0}. \tag{46}$$

Wprowadzając zaś zamiast współczynnika mocowego oporności współczynnik dynamiczności (wzór 10) oraz uwzględniając wzór (46) otrzymuje się

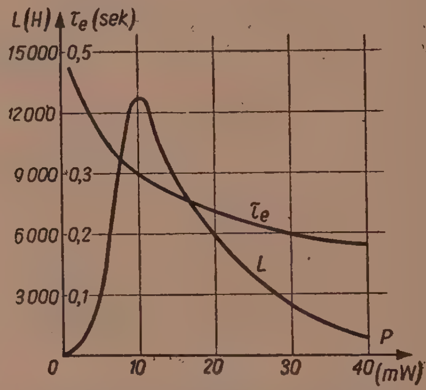
$$\left.\begin{aligned} R&=R_0,\\ r&=r_0,\\ L&=\tau\frac{R_0^2-r_0^2}{2R_0}=\tau R_0\frac{2F_0}{(1+F_0)^2},\\ \tau_e&=\tau\frac{R_0+r_0}{2R_0}=\tau\frac{1}{1+F_0}. \end{aligned}\right| \tag{47}$$

Tak wyrażają się wartości elementów układu zastępczego termistora spolaryzowanego przy małych amplitudach zmiennych przebiegów przez trzy podstawowe parametry termistora: R, τ i F (względnie r) wyznaczone w statycznym punkcie pracy [1].

Wartości elementów układu zastępczego termistora zależne są od położenia statycznego punktu pracy; przedstawiono to w tablicy 2 i na rysunkach 15 i 16. Dane te dotyczą termistora A 1522 o charakterystyce $U=f(I)$ z rys. 4b [4].



Rys. 15. Zależność wartości oporności układu zastępczego od położenia statycznego punktu pracy.



Rys. 16. Zależność wartości indukcyjności i elektrycznej stałej czasowej od położenia statycznego punkt upracy.

Tablica 2

Zależność wartości elementów układu zastępczego od położenia statycznego punktu pracy

Termistor z rys. 4 b.

I (mA)	R (kΩ)	r (kΩ)	F (—)	L (H)	τ_e (sek)
0,2	96	37	0,44	2 500	0,42
0,5	40	0	1	12 200	0,31
1	18,5	−4,4	1,62	5 300	0,23
1,5	11,0	−3,4	1,90	3 000	0,21
2,0	7,5	−2,9	2,30	1 930	0,19
2,5	5,4	−2,3	2,48	1 350	0,18
3,0	4,3	−1,7	0,58	1 020	0,17

[1] W dalszym ciągu artykułu przy wielkościach R_0, r_0 ...... itd., indeks 0 będzie pomijany.

3.4. Impedancja termistora dla przebiegów sinusoidalnych

Dla sinusoidalnych przebiegów $i(t)$, lub $u(t)$ impedancja układu zastępczego termistora (według rys. 14) jest równa

$$\hat{Z} = r + \frac{(R-r)j\omega L}{(R-r)+j\omega L}, \tag{48}$$

po uwzględnieniu zaś wzorów (11) i (47) wynosi

$$\hat{Z} = R\frac{1-F+j\omega\tau}{1+F+j\omega\tau}. \tag{49}$$

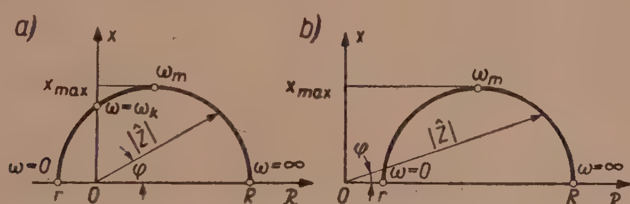
Impedancję tę można przedstawić w postaci szeregowo połączonych oporności rzeczywistej

$$\mathcal{R} = \mathbf{Re}\hat{Z} = \frac{1-F^2+(\omega\tau)^2}{(1+F)^2+(\omega\tau)^2} \tag{50}$$

i urojonej

$$X = \mathbf{Im}\hat{Z} = \frac{2F\omega\tau}{(1+F)^2+(\omega\tau)^2}. \tag{51}$$

Wartości składowych $\mathcal{R}$ i X impedancji zależą od częstotliwości przyłożonego przebiegu, co przedstawiono na wykresie kołowym $\hat{Z} = f(\omega)$ (rys 17). $|\hat{Z}|$ oznacza moduł impedancji



Rys. 17. Zależność składowych impedancji układu zastępczego od częstotliwości
a) statyczny punkt pracy znajduje się poza punktem szczytowym charakterystyki $U=f(I)$,
b) przed punktem szczytowym.

$$|\hat{Z}| = \sqrt{\mathcal{R}^2+X^2}, \tag{52}$$

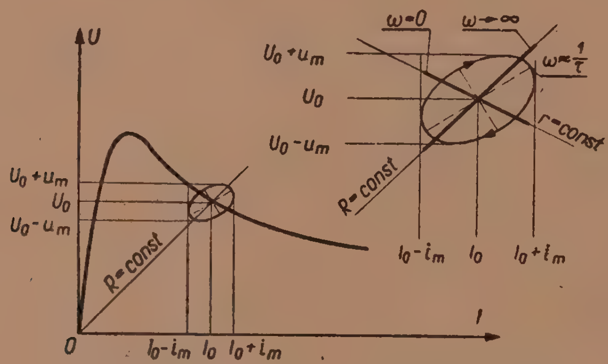
zaś φ jest jej kątem fazowym

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{X}{\mathcal{R}}. \tag{53}$$

Przy częstotliwości $\omega \to 0$ wpływ bezwładności cieplnej termistora może być pominięty i zmiany np. napięcia na termistorze odbywają się

wzdłuż charakterystyki statycznej (rys. 18), przy czym ze wzrostem prądu napięcie rośnie — gdy statyczny punkt pracy znajduje się przed punktem szczytowym charakterystyki $U=f(I)$, lub maleje — gdy statyczny punkt pracy znajduje się poza punktem szczytowym. Jak wynika z układu zastępczego i rys. 18 równoważne jest to przesunięciu fazy pomiędzy napięciem i prądem o 0° lub 180°. W przypadku tym termistor przedstawia oporność równą oporności przyrostowej.

Dla częstotliwości dostatecznie wielkich ($\omega \rightarrow \infty$) zmiany napięcia odbywają się wzdłuż charakterystyki izotermicznej termistora. Napięcie



Rys. 18. Charakterystyki robocze termistora spolaryzowanego.

jest w fazie z prądem, a impedancja termistora staje się równa jego oporności statycznej.

Dla częstotliwości pośrednich $\left(0 < \omega \approx \frac{1}{\tau} < \infty\right)$ występuje zmienne przesunięcie fazy. Roboczy punkt pracy opisuje zamkniętą pętlę — elipsę. Zjawisko to wywołane jest nienadążaniem zmian temperatury termistora za zmianami obciążenia. Przy zmniejszaniu się prądu termistor ma temperaturę wyższą od temperatury odpowiadającej stanowi ustalonemu przy wartości prądu w danej chwili, przy zwiększaniu zaś prądu — odwrotnie. Przy wzrastającym prądzie oporność termistora i napięcie na termistorze będą większe od tych wartości w stanie ustalonym, zaś przy malejącym prądzie — mniejsze.

Częstotliwość, przy której składowa rzeczywista impedancji termistora jest równa zeru, nazwano częstotliwością krytyczną ω_k;

$$\omega_k = \frac{r-R}{L}\sqrt{\frac{-r}{R}} = \sqrt{\frac{F^2-1}{\tau}}. \tag{54}$$

Przy tej częstotliwości napięcie wyprzedza prąd o kąt $\varphi = \frac{\pi}{2}$ i ter-

mistor przedstawia sobą reaktancję X_k o charakterze indukcyjnym, przy czym

$$X_k = \sqrt{-rR} = R\sqrt{\frac{F-1}{F+1}}. \tag{55}$$

Największa wartość reaktancji przypada dla częstotliwości ω_m (patrz rys. 17)

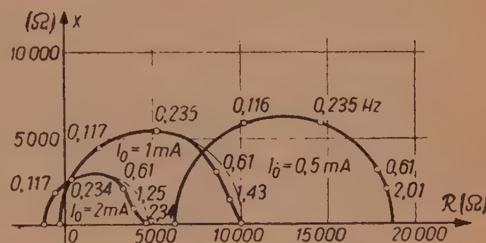
$$\omega_m = \frac{1+F}{\tau} \tag{56}$$

i wynosi

$$X_m = R\frac{F}{1+F} = \frac{R-r}{2}. \tag{57}$$

Przy statycznym punkcie pracy położonym na wznoszącej się części charakterystyki $U=f(I)$ składowa rzeczywista oporności nigdy nie dąży do zera, czyli częstotliwość krytyczna nie istnieje.

Na rys. 19 podano wykresy kołowe impedancji pewnego termistora przy różnych położeniach statycznego punktu pracy, obliczone według podanych zależności. Zaznaczono na nich także doświadczalne wyniki pomiarów [7]. Jak widać, wyniki są wystarczająco zgodne.



Rys. 19. Przebieg składowych impedancji pewnego termistora. (Liniami przerywanymi zaznaczono odcinki krzywej teoretycznej nie pokrywającej się z krzywą doświadczalną).

4. WYTWARZANIE DRGAŃ ZA POMOCĄ TERMISTORA

4.1. Uwagi ogólne

Z rozważań przeprowadzonych w rozdziale 3 wynika, że w zakresie częstotliwości $0 < \omega < \omega_k$ termistor spolaryzowany przedstawia opór ujemny z reaktancją dodatnią. Dołączając doń reaktancję o przeciwnym znaku, czyli pojemność, uzyskuje się obwód rezonansowy LC odtłumiony ujemną opornością $\mathcal{R}$. W określonych warunkach układ taki może wytwarzać samopodtrzymujące się drgania elektryczne o przebiegu sinusoidalnym. Występuje tu przypadek układu nieizolowanego, do którego energia jest doprowadzana z zewnątrz w sposób ciągły (przez utrzymanie stałej polaryzacji termistora). Częstotliwość drgań jest określona przede wszystkim przez parametry układu.

Rozważania nad zagadnieniem wytwarzania drgań za pomocą termi-

stora przeprowadzono w oparciu o jego układ zastępczy przedstawiony na rys. 14, który, jak już stwierdzono w rozdziale 3, w zupełności odtwarza właściwości elektryczne termistora spolaryzowanego przy małych amplitudach zmiennych przebiegów.

Możliwość wytwarzania drgań należy zawdzięczać istnieniu stosunkowo dużego i ujemnego współczynnika temperaturowego oporności termistora oraz istnieniu bezwładności cieplnej. Temperaturowy współczynnik oporności jest m. in. przyczyną specyficznego kształtu charakterystyki statycznej $U=f(I)$, a więc i występowania oporności ujemnej. Bezwładność cieplna zaś, jako wynik ogólnego prawa przeciwdziałania zachodzącym zmianom, jest jedną z przyczyn właściwości równoważnych tym, jakie wywołuje indukcyjność w elektrycznym układzie zastępczym termistora.

4.2. Teoria liniowa wytwarzania drgań

Teoria liniowa wytwarzania drgań obejmuje rozważania nad pobudzaniem obwodu rezonansowego o elementach liniowych za pomocą oporu ujemnego również liniowego. W tym przypadku przebiegi napięć i prądów w układzie generacyjnym w stanie ustalonym są czysto sinusoidalne, wyniki zaś rozważań nie zależą od amplitud, dzięki czemu można stosować do rozważań rachunek symboliczny. Do ostatecznych wzorów nie wchodzą ani amplitudy napięć, ani prądów; wartość ich może być dowolna, taka jaka została narzucona początkowymi warunkami pracy układu.

W rzeczywistości nie są znane opory ujemne o charakterystykach idealnie prostoliniowych. Jednak można zazwyczaj na ich charakterystyce nieliniowej wyodrębnić odcinek ograniczonej długości, który swym kształtem zbliża się do kształtu prostoliniowego; w zakresie amplitud nie wykraczających poza granice tego odcinka można uważać taki opór za liniowy i stałą jego wartość wprowadzić do rozważań.

Zasadnicze równanie generatora z oporem ujemnym liniowym.

Jeżeli układ przedstawiony na rys. 20 składający się z impedancji $\hat{Z}_{(-)}$ utworzonej z oporu ujemnego i reaktancji, impedancji $\hat{Z}$ oraz siły elektromotorycznej $\hat{E}$ o częstotliwości ω ma być generatorem działającym w stanie ustalonym, to powinien w jego obwodzie istnieć prąd $\hat{I}$ bez obecności, jakiejkolwiek zewnętrznej siły elektromotorycznej [6], czyli gdy

$$[\hat{Z}+\hat{Z}_{(-)}]\cdot\hat{I}=\hat{E}\to 0. \tag{58}$$

Wypadkowa impedancja układu musi więc być równa zeru

$$\hat{Z}+\hat{Z}_{(-)}=0, \tag{59}$$

Ponieważ zwykle jest

$$\left.\begin{aligned}\hat{Z}&=R+jX_1,\\ \hat{Z}_{(-)}&=\mathcal{R}+jX_2,\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

a zatem równanie (59) przedstawi się jako

$$(\mathcal{R}+R)+j(X_1+X_2)=0\,. \tag{61}$$

Stąd otrzymuje się dwa warunki:
— warunek amplitudy

$$R+\mathcal{R}=0\,, \tag{62}$$

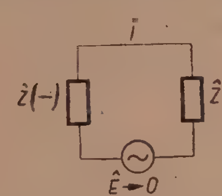
— warunek fazy

$$X_1+X_2=0\,, \tag{63}$$

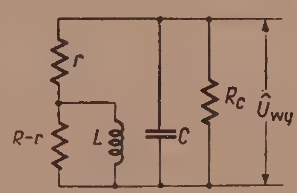
które muszą być równocześnie i ściśle spełnione. W przeciwnym bowiem razie nie będzie utrzymany stan ustalony drgania, a zatem powyższe rozważania nie będą słuszne.

Podstawowy układ generatora termistorowego

Rozpatrzmy obwód przedstawiony na rys. 21 składający się z termistora spolaryzowanego i dołączonych doń równolegle pojemności C



Rys. 20. Zasadniczy układ generatora z oporem ujemnym liniowym.



Rys. 21. Podstawowy układ generatora termistorowego (układ $R_t||C||R_c$).

i oporności R_c przedstawiającej sobą opór strat kondensatora oraz ewentualnie obciążenie obwodu. Ze względu na kształt obwód ten oznaczymy symbolicznie jako obwód $R_t||C||R_c$. W układzie tym pominięto obwód zasilania służący do utrzymania stałej polaryzacji termistora. Przyjmuje się wprost, że do obwodu przyłożona jest stała wartość napięcia, przy czym źródło zasilania praktycznie nie obciąża obwodu i nie wnosi doń jakiejkolwiek reaktancji. Taki układ zasilania dzięki minimalnej mocy pobieranej przez termistor jest bardzo łatwy do urzeczywistnienia, przyjęcie natomiast powyższego założenia bardzo upraszcza rozważania [2].

[2] Wpływ zmian napięcia zasilającego rozpatrzono w rozdziale 4.4.

Impedancja układu wyraża się jako

$$\hat{Z}=\frac{\dfrac{\left[r+\dfrac{(R-r)j\omega L}{R-r+j\omega L}\right]\left(-j\dfrac{1}{\omega C}\right)}{r+\dfrac{(R-r)j\omega L}{R-r+j\omega L}-j\dfrac{1}{\omega C}}R_c}{\dfrac{\left[r+\dfrac{(R-r)j\omega L}{R-r+j\omega L}\right]\left(-j\dfrac{1}{\omega C}\right)}{r+\dfrac{(R-r)j\omega L}{R-r+j\omega L}-j\dfrac{1}{\omega C}}+R_c}=$$

$$=\frac{\omega RR_cL+jr(r-R)R_c}{\omega[RL+R_c(rRC-r^2C+L)]+j[r(r-R)+R_c(\omega^2RLC+r-R)]}. \tag{64}$$

Można ją przedstawić w postaci ogólnej

$$\hat{Z}=a+jb, \tag{65}$$

przy czym

$$a=R_c\frac{\omega^2RL^2(R+R_c)+r^4+r^3(R_c-2R)+r^2(R^2-2RR_c)+rR^2R_c}{\omega^2[L(R+R_c)-rR_cC(r-R)]^2+[\omega^2RR_cCL+(r+R_c)(r-R)]^2}, \tag{66}$$

$$b=-\omega R_c^2\frac{\omega^2R^2CL^2+r^4C-2r^3RC+r^2(R^2C-L)+2rRL-R^2L}{\omega^2[L(R+R_c)-rR_cC(r-R)]^2+[\omega^2RR_cCL+(r+R_c)(r-R)]^2}. \tag{67}$$

Dla spełnienia warunku fazy składowa urojona impedancji musi być równa zeru

$$b=0; \tag{68}$$

będzie zachodzić to dla częstotliwości określonej zależnością

$$\omega^2=\frac{-r^4C+2r^3RC-r^2(R^2C-L)-2rRL+R^2L}{R^2CL^2}, \tag{69}$$

z której, po niewielkich przekształceniach, otrzymuje się ostatecznie następujący wzór na częstotliwość wytwarzanych drgań

$$\omega=\omega_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\sqrt{1-r^2\frac{C}{L}}, \tag{70}$$

przy czym ω_0 określone jako

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{71}$$

jest częstotliwością rezonansową obwodu szeregowego $L-C$ lub bezstratnego (ewentualnie z jednakowymi opornościami strat w obu gałęziach) obwodu równoległego $L\|C$.

Dla spełnienia warunku amplitudy składowa rzeczywista impedancji musi być równa zeru

$$a=0, \tag{72}$$

stąd, na podstawie (66), wyznacza się częstotliwość jako

$$\omega=\frac{r-R}{L}\sqrt{\frac{-r(r+R_c)}{R(R+R_c)}}. \tag{73}$$

Ponieważ musi być jednocześnie spełniona tak zależność (70) wynikająca z warunku fazy, jak i zależność (73) wynikająca z warunku amplitudy, więc każdej częstotliwości o wartości zależnej od wartości parametrów termistora i dołączonej doń pojemności będzie odpowiadać ściśle określona na podstawie (73) wartość koniecznej oporności R_c a mianowicie

$$R_c=-\frac{\omega^2L^2R^2+r^2(r-R)^2}{\omega^2L^2R+r(r-R)^2}. \tag{74}$$

Z (73) wynika także, iż wielkość R_c ogranicza zakres możliwych najwyższych częstotliwości drgań wytwarzanych za pomocą danego termistora. Przy $R_c \longrightarrow \infty$, tj. przy kondensatorze bez strat i obciążeniu o oporności nieskończenie dużej z (73) otrzymuje się

$$\omega\longrightarrow\frac{r-R}{L}\sqrt{\frac{-r}{R}}, \tag{75}$$

czyli (uwzględniając wzór (54)) częstotliwość drgań dąży do wartości częstotliwości krytycznej termistora

$$R_c\longrightarrow\infty,\ \omega\longrightarrow\omega_k, \tag{76}$$

przy określonej zaś wartości R_c częstotliwość wytwarzanych drgań jest zawsze od niej mniejsza.

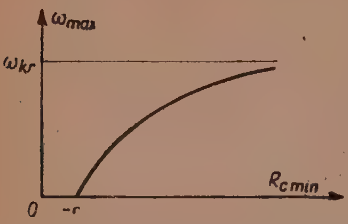
Najmniejsza dopuszczalna wartość R_c wynika z warunku $\omega \geqslant 0$, stąd z (73) znajduje się

$$R_c\geqslant -r, \tag{77}$$

czyli dla stworzenia możliwości istnienia drgań R_c musi być większe od bezwzględnej wartości ujemnej oporności przyrostowej termistora.

Przebieg zależności najwyższej wytwarzanej częstotliwości od wartości $R_{c\,min}$ przedstawiono na rys. 22. Oczywiście, dla otrzymania przy danym $R_c=R_c'>R_{c\,min}$ drgań o częstotliwości $\omega<\omega_{max}$ należy w myśl (74) dodatkowo odpowiednio stłumić obwód drgań tak, by był zachowany warunek amplitudy.

Jak już wspomniano, oporność R_c przedstawia sobą równolegle połączone oporność strat kondensatora i oporność obciążenia. Ta ostatnia w ogólnym przypadku może być pewną impedancją $\hat{Z}_0$ dającą się przedstawić w postaci połączonych równolegle reaktancji i oporności rzeczywistej. Wtedy oczywiście wartość częstotliwości wytwarzanych drgań będzie bezpośrednio zależna od wartości i charakteru $\hat{Z}_0$.



Rys. 22. Zależność najwyższej możliwej wytwarzanej częstotliwości od najmniejszej dopuszczalnej wartości R_c.

Teoria liniowa wytwarzania drgań daje więc następujące zależności na częstotliwość wytwarzanych drgań i konieczną wartość oporności R_c

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\sqrt{1-r^2\frac{C}{L}}\,, \\ R_c &= -\frac{\omega^2L^2R^2+r^2(r-R)^2}{\omega^2L^2R+r(r-R)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Zależności te po uwzględnieniu wzoru (47 c) można przedstawić jako

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{2}{\tau CR}\,\frac{R-r}{R+r}-\left(\frac{2}{\tau}\,\frac{r}{R+r}\right)^2}\,, \\ R_c &= -R\,\frac{[\tau\omega(R+r)]^2+4r^2}{[\tau\omega(R+r)]^2+4rR}. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Należy zauważyć, że w ostatniej parze wzorów warunki wytwarzania drgań określone są tylko przez trzy parametry termistora: oporności; statyczną i przyrostową, cieplną stałą czasową oraz przez pojemność C, zbędna jest zaś znajomość wartości indukcyjności L.

Częstotliwość wytwarzanych drgań można także określić za pomocą wzoru wyprowadzonego w rozdziale 4.3.

$$\omega=\omega_0\frac{q_L}{q_C}\sqrt{\frac{q_C^2-1}{q_L^2-1}}\,, \tag{80}$$

w którym q_L i q_C oznaczają odpowiednio współczynniki reaktancyjności indukcyjności termistora i pojemności C przy częstotliwości ω_0 [12]

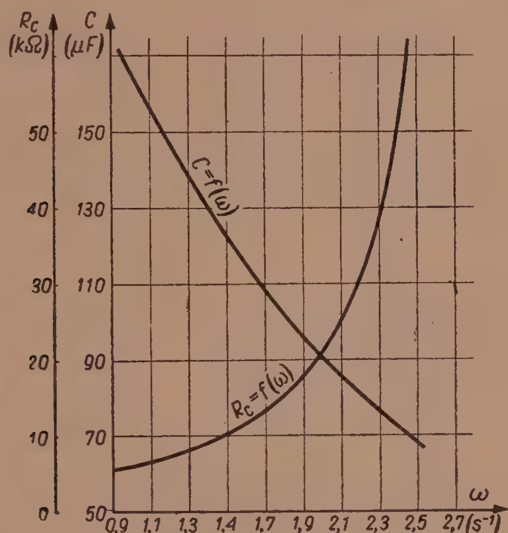
$$q_L=\frac{R-r}{\omega_0 L}=(R-r)\sqrt{\frac{C}{L}}\,, \tag{81}$$

$$q_C=R_c\omega_0 C=R_c\sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (82$$

Z pierwszego równania z którejkolwiek par (78) lub (79) można wyznaczyć konieczną wartość pojemności C dla otrzymania przy danych parametrach termistora drgań o częstotliwości ω; np. z (78) otrzymuje się

$$C = \frac{1}{\frac{r^2}{L} + L\left(\omega \frac{R}{R-r}\right)^2} \qquad (83)$$

Przykładowe przebiegi zależności $C=f(\omega)$ oraz $R_c=f(\omega)$ przedstawiono na rys. 23. Im jest większa częstotliwość wytwarzanych drgań, tym konieczna jest większa wartość R_c, czyli tym jest mniejsze dopusz-



Rys. 23. Zależność koniecznych wartości pojemności i oporności R_c od wytwarzanej częstotliwości. Dane termistora: R=11 kΩ, $r=-3{,}6$ kΩ $L=3000$ H $\tau=0{,}61$ s.

czalne tłumienie obwodu drgań. Wynika to także z przebiegu składowych impedancji układu zastępczego termistora w funkcji częstotliwości (patrz rys. 17).

Należy zauważyć, że generator termistorowy w porównaniu z klasycznym generatorem LC, dla którego $\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, dla pokrycia określonego zakresu wytwarzanych częstotliwości wymaga mniejszych zmian pojemności. Np. generator termistorowy o danych jak przy rys. 23 dla zakresu $\omega = 0{,}9 \ldots 2{,}7$ s^{-1} wymaga zmiany pojemności w stosunku 1 : 3, natomiast w generatorze LC o indukcyjności równej indukcyjności termistora stosunek zmian pojemności wynosiłby prawie 1 : 8.

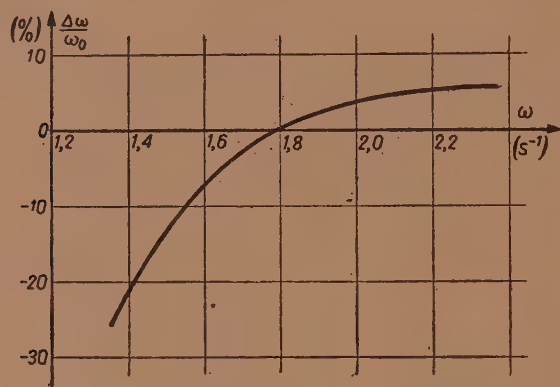
Względne odchylenie częstotliwości drgań od częstotliwości ω_0

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}=\frac{\omega}{\omega_0}-1 \tag{84}$$

można wyrazić za pomocą wzoru

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\left(1-\frac{r}{R}\right)\sqrt{1-r^2\cdot\frac{C}{L}}-1\,. \tag{85}$$

Przebieg zależności $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=f(\omega)$ podano na rys. 24. W tym przypadku



Rys. 24. Zależność $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=f(\omega)$. Dane termistora jak na rys. 23.

zmianę częstotliwości drgań osiągano przez zmianę pojemności C. Częstotliwość drgań ω będzie równa częstotliwości ω_0, gdy będzie spełniony warunek

$$\left(1-\frac{r}{R}\right)\sqrt{1-r^2\frac{C}{L}}=1\,. \tag{86}$$

Nastąpi to dla wartości pojemności

$$C_0=\frac{L\left(\frac{r}{R}-2\right)}{rR\left(1-\frac{r}{R}\right)^2}, \tag{87}$$

której odpowiada częstotliwość drgań

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC_0}}=\omega_0\,. \tag{88}$$

Zakres wytwarzanych częstotliwości ograniczony jest od góry częstotliwością krytyczną termistora. W przybliżeniu można przyjąć, że wartość częstotliwości krytycznej jest równa odwrotności cieplnej stałej czasowej termistora. Ponieważ osiągalne w termistorach miniaturowych wartości stałej czasowej są rzędu kilku dziesiątych sekundy, najwyższe wytwarzane częstotliwości drgań nie przekraczają paru herców.

4.3. Teoria nieliniowa wytwarzania drgań

Charakterystyka oporu ujemnego termistora tylko w niewielkim zakresie swego przebiegu może być uważana za prostoliniową, a przeto odpowiadająca jej oporność dynamiczna jest stała jedynie do pewnej niewielkiej wartości amplitudy. Począwszy od tej wartości oporność dynamiczna przestaje być praktycznie biorąc stała i zależy od amplitudy, tzn.

$$\mathcal{R}=f(\overline{U}), \quad \text{ewentualnie} \quad \mathcal{R}=f(\overline{I}). \tag{89}$$

Oczywiście, że w tych warunkach zmienne przebiegi nie są już sinusoidalne a rachunek symboliczny tak dogodny do rozważań układów liniowych w zwykłej postaci nie może być użyty do rozwiązywania zagadnień nieliniowych.

Zasadnicze równanie generatora z oporem ujemnym nieliniowym.

W przypadku, gdy opór ujemny jest nieliniowy, ogólne równanie generatora z rys. 20 może być przedstawione [6] za pomocą wyrażenia podobnego do wyrażenia (58), a mianowicie

$$[\hat{Z}+\hat{Z}_{(-)}(\overline{I})]\,\hat{I}=E\longrightarrow 0, \tag{90}$$

w którym $\hat{Z}_{(-)}(I)$ oznacza impedancję będącą funkcją amplitudy prądu.

Jeśli wypadkową impedancję układu przedstawić jako

$$\hat{Z}+\hat{Z}_{(-)}(\overline{I})=a(\overline{I})+jb(\overline{I})=0, \tag{91}$$

wtedy warunki amplitudy i fazy wyrażają się odpowiednio

$$a(\overline{I})=0; \quad b(\overline{I})=0. \tag{92}$$

Ponieważ wyrażenia $a(\overline{I})$ i $b(\overline{I})$ są funkcjami amplitudy, gdyż zawierają między innymi oporność dynamiczną ujemną, częstotliwość wytwarzanych drgań zależna będzie od ich amplitudy.

Metoda równowagi mocy urojonej harmonicznych.

Dla badania stanu ustalonego pracy generatora z powodzeniem stosowana jest metoda równowagi mocy urojonej harmonicznych podana przez J. Groszkowskiego [5]. Z teorii równowagi mocy urojonej w generatorach autooscylacyjnych wynika, że dla oporu ujemnego, którego cha-

rakterystyka wyraża się jednoznaczną zależnością napięcia i prądu (tzw. linią cienką) musi być spełniony warunek

$$\oint u di = \oint i du = 0, \tag{93}$$

przy czym $\oint$ oznacza tu całkę okrężną za jeden cykl podstawowy przebiegu zmiennego. Jeśli ten opór ujemny jest elementem pobudzającym jakiś obwód elektryczny, to dla ustalonego stanu pracy takiego układu generacyjnego słuszna jest następująca zależność

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \,\mathbf{Im}\{\hat{U}_k' \check{I}_k\} = 0\,. \tag{94}$$

która głosi, że suma k-krotnych (k jest rzędem harmonicznej) mocy biernych (urojonych) na zaciskach bezpętlowego oporu nieliniowego musi być równa zeru. Z zależności tej otrzymuje się wzór

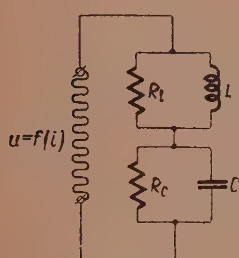
$$\sum_{k=1}^{\infty} k X_k n_k^2 = 0\,, \tag{95}$$

z którego można wyznaczyć częstotliwość drgań w funkcji zawartości harmonicznych w przebiegu wytwarzanych drgań.

W (95) X_k oznacza reaktancję układu dla k-tej harmonicznej, zaś n_k — zawartość k-tej harmonicznej prądowej w oporze ujemnym

$$n_k = \frac{\bar{I}_k}{\bar{I}_1}\,. \tag{96}$$

Generator w układzie $R_t \| C \| R_c$.



Rys. 25. Generator termistorowy w układzie $R_t \| C \| R_c$.

Rozpatrywany w rozdziale 4.2. podstawowy układ generatora termistorowego można także przedstawić w postaci obwodu powstałego z połączenia szeregowego indukcyjności i pojemności z równoległymi oporami strat (rys. 25) dołączonego do oporu ujemnego $u=f(i)$ o charakterystyce bezpętlowej stanowiącej odcinek charakterystyki statycznej termistora (przy założeniu niezmienności na tym odcinku wartości indukcyjności L).

Po wyznaczeniu impedancji tego obwodu w funkcji częstotliwości harmonicznych i podstawieniu jej do wzoru (95) otrzymuje się (patrz Dodatek 3) następujący wzór

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 - 1}{ak^2\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + \frac{b}{k^2}}\, n_k^2 = 0\,, \tag{97}$$

służący do określenia częstotliwości wytwarzanych drgań w zależności od zawartości harmonicznych. We wzorze tym n_k jest określone przez (96), ω_1 jest częstotliwością generatora w stanie granicznym, tzn. przy $\sum n_k \longrightarrow 0$

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{q_L}{q_C} \sqrt{\frac{q_C^2 - 1}{q_L^2 - 1}}, \tag{98}$$

zaś

$$a = q_L^2 \frac{q_C^2 - 1}{(q_L^2 - 1)(1 + q_C^2 q_L^2)}, \qquad b = q_C^2 \frac{q_L^2 - 1}{(q_C^2 - 1)(1 + q_C^2 q_L^2)}, \tag{99}$$

przy czym q_L i q_C określone są przez (81) i (82).

Równanie (97) można rozwiązać wykreślnie przyjmując skończoną ilość wyrazów; natomiast w celu bezpośredniego analitycznego wyznaczenia zeń częstotliwości ze względu na trudności rachunkowe konieczne jest poczynienie w nim pewnych przybliżeń i uproszczeń (patrz Dodatek 4). Otrzymuje się wtedy na względne odchylenie częstotliwości od częstotliwości granicznej.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_1} = \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \tag{100}$$

następujące wyrażenie

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_1} = -\frac{1}{2} \frac{\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1 - k^2}{1 + ak^2 + \dfrac{b}{k^2}} n_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[\dfrac{(k^2 - 1)(2ak^2 + 1)}{\left(1 + ak^2 + \dfrac{b}{k^2}\right)^2} - \dfrac{k^2}{1 + ak^2 + \dfrac{b}{k^2}} \right] n_k^2}. \tag{101}$$

Mając wyznaczone $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_1}$ wylicza się częstotliwość drgań jako

$$\omega = \omega_1 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_1}\right). \tag{102}$$

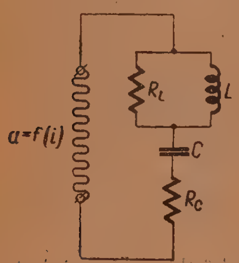
Należy podkreślić, że wzór (101) jest słuszny dla $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_1} < 0{,}1$ (przy $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_1} = 0{,}1$ błąd wynosi 2%). Przy większych odchyleniach od częstotliwości granicznej należy stosować ścisły wzór (97).

Ze wzrostem zawartości harmonicznych częstotliwość drgań maleje, zaś przy $\sum n_k \longrightarrow 0$ zmierza do częstotliwości granicznej określonej jednym ze wzorów podanych w rozdziale 4.2.

To obniżenie częstotliwości drgań przy wzroście zawartości harmonicznych można łatwo wytłumaczyć wychodząc z zasady równowag energii mocy urojonej (patrz np. [6], str. 257).

Jak wiadomo, pojawienie się harmonicznych jest związane z nieliniowością roboczego odcinka oporu ujemnego $u=f(i)$. Im większa amplitud wytwarzanych drgań tym większe zniekształcenie ich kształtu (w porównaniu z przebiegiem sinusoidalnym) i większe odchylenie ich częstotliwości od częstotliwości granicznej. Gdy układ zbliża się do stanu granicznego to amplituda drgań maleje, przy czym częstotliwość drga wzrasta i dąży do częstotliwości granicznej, kształt zaś — do idealneg przebiegu sinusoidalnego.

Generator w układzie $R_t||(C-R_C)$.



Rys. 26. Generator termistorowy w układzie $R_t|(C-R_c)$.

Rozpatrzmy teraz układ, w którym obciążeni włączone jest w szereg z pojemnością C (rys. 26 Układ taki posiada tę zaletę, iż praktycznie łatwie jest osiągnąć stan graniczny (w układzie $R_t||C||R$ zmniejszanie oporności R_C wywołuje nadmierne obciążenie źródła zasilania). Stosowanie tego układ jest więc także konieczne przy małej oporności obciążenia.

Postępując podobnie jak przy układzie $R_t||C||R_C$ otrzymuje się (patrz Dodatek 5) następujący związek pomiędzy częstotliwością wytwarzanych drga i zawartością harmonicznych

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2-1}{k^2\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2+q_L^2-1}\, n_k^2=0, \qquad (10$$

gdzie częstotliwość graniczna ω_1 określona jest równaniem

$$\omega_1=\omega_0\cdot\frac{q_L}{\sqrt{q_L^2-1}}. \qquad (10$$

Przybliżony wzór na względne odchylenie częstotliwości od częstotliwości granicznej przedstawi się jako

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_1}=-\frac{1}{2q_L^2}\,\frac{\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{k^2-1}{k^2-1+q_L^2}\cdot n_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(k^2-1+q_L^2)^2}\, n_k^2}. \qquad (10$$

Dokładność przybliżonego wzoru (105) jest zupełnie wystarczająca. Dla przykładu w tablicy 3 podano szereg wartości wyznaczonych na podstawie dokładnego wzoru (103) i przybliżonej zależności (105). Jak widać dla $\frac{\Delta\omega}{\omega_1} < 0{,}1$ zgodność pomiędzy wzorami jest zupełna, natomiast dla $\frac{\Delta\omega}{\omega_1} \approx 0{,}2$ błąd wynosi zaledwie 1%.

Tablica 3

Wartości $\frac{\omega}{\omega_1}$ wyznaczone wg dokładnej zależności (103) i wzoru przybliżonego (105)

wg (103)	0,996	0,982	0,963	0,879	0,737
wg (105)	0,996	0,982	0,964	0,882	0,743

4.4. Wpływ zmian parametrów termistora na częstotliwość wytwarzanych drgań.

Zmiana częstotliwości generatora termistorowego może nastąpić przez zmianę parametrów termistora oraz zmianę parametrów elementów doń dołączonych. Zmiana parametrów termistora wiąże się ze zmianą położenia jego statycznego punktu pracy, co może nastąpić przez

— zmianę warunków chłodzenia termistora przez zmianę temperatury otoczenia lub rodzaju otaczającego środowiska,

— zmianę napięcia zasilającego,

— starzenie się termistora.

Z wymienionych czynników najważniejsze są dwa pierwsze i te zostaną dokładniej omówione. Dla ochrony termistora od wpływu rodzaju i stanu dynamicznego środowiska zamyka się go w zamkniętym baloniku próżniowym, zaś wpływ starzenia termistora przy prawidłowej technologii wykonania i racjonalnej eksploatacji może być pominięty [9].

Wpływ zmian temperatury otoczenia.

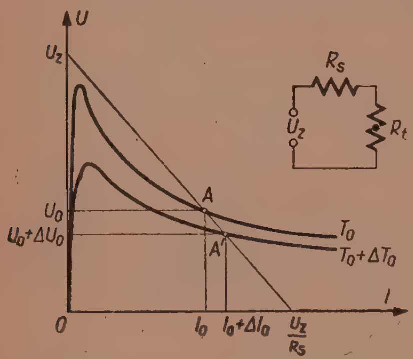
Przedstawmy termistor wraz z układem polaryzującym w postaci obwodu zastępczego jak na rys. 27. Niech statyczny punkt pracy termistora spolaryzowanego znajduje się w punkcie A charakterystyki statycznej napięciowo-prądowej zdjętej przy temperaturze otoczenia T_0. Gdy temperatura otoczenia zmieni się o ΔT_0 statyczny punkt pracy przesunie się do punktu A' charakterystyki odpowiadającej temperaturze $T_0+\Delta T_0$. Punktowi temu będą odpowiadać nowe wartości R, r, L i F termistora; w rezultacie częstotliwość drgań ulegnie zmianie.

Można wykazać (patrz Dodatek 6), że przyrosty napięcia i prądu termistora przy zmianie temperatury otoczenia o ΔT_0 będą wynosić

$$\Delta U_0 = -\Delta T_0 \frac{U_0 K F}{P_0} \frac{R_s}{R_s(1+F)+R(1-F)}, \qquad (106)$$

$$\Delta I_0 = \Delta T_0 \frac{I_0 K F}{P_0} \frac{R}{R_s(1+F)+R(1-F)}, \qquad (107)$$

przy czym K jest współczynnikiem strat, F — współczynnikiem dynamiczności, a R — opornością statyczną termistora w statycznym punkcie pracy U_0, I_0, wartości zaś parametrów termistora w punkcie A' będą odpowiednio równe



Rys. 27. Wpływ zmian temperatury otoczenia na położenie statycznego punktu pracy.

— oporność

$$R' = A \exp \frac{a_1}{a_2 + a_3 \Delta T_0}, \qquad (108)$$

— współczynnik dynamiczności

$$F' = a_6 \frac{a_4 + a_5 \Delta T_0}{(a_2 + a_3 \Delta T_0)^2}, \qquad (109)$$

— indukcyjność

$$L' = a_7 \frac{(a_4 + a_5 \Delta T_0)(a_2 + a_3 \Delta T_0)^2}{[(a_2 + a_3 \Delta T_0)^2 + a_6(a_4 + a_5 \Delta T_0)]^2} \exp \frac{a_1}{a_2 + a_3 \Delta T_0}, \qquad (110)$$

przy czym współczynniki $a_1 \ldots a_7$ wynoszą

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= BK \\ a_2 &= P_0 + KT_0 \\ a_3 &= m + K \\ a_4 &= BP_0 \\ a_5 &= mB \\ a_6 &= K \\ a_7 &= 2\tau AK \end{aligned}\right\} \qquad (111)$$

oraz

$$m = FK \frac{R - R_s}{R_s(1+F)+R(1-F)} \qquad (112)$$

i są dla danego termistora i układu wielkościami stałymi.

Podstawiając wyznaczone nowe wartości parametrów termistora do wzoru na częstotliwość wytwarzanych drgań, otrzymuje się wyrażenie na zależność częstotliwości od zmian temperatury otoczenia. Dla układu $R_t \| C \| R_c$ dochodzi się (patrz Dodatek 7) do wzoru

$$\omega_T = b_1 \sqrt{b_2 \Delta T_0^2 + b_3 \Delta T_0 + b_4}, \qquad (113)$$

w którym

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\tau(P_0+KT_0)}, \\ b_2 &= -\left(\frac{mBK}{P_0+KT_0}\right)^2, \\ b_3 &= 2mBK\left[1+\frac{\tau}{AC}\exp\left(\frac{-BK}{P_0+KT_0}\right)-\frac{BKP_0}{2(P_0+KT_0)^2}\right], \\ b_4 &= 2BKP_0\left[1+\frac{\tau}{AC}\exp\left(\frac{-BK}{P_0+KT_0}\right)-\frac{BKP_0}{2(P_0+KT_0)^2}\right]-(P_0+KT_0)^2 \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

są wartościami stałymi.

Częstotliwość ω_{T_0} będzie wtedy przedstawiona jako

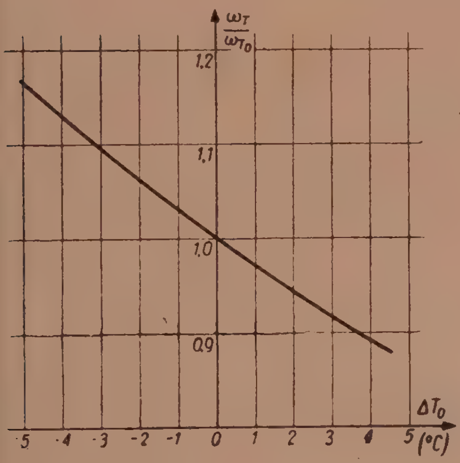
$$\omega_{T_0} = b_1\sqrt{b_4}, \quad (115)$$

zaś względny przyrost częstotliwości

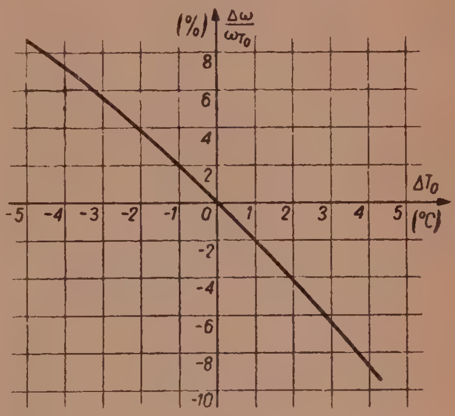
$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{T_0}} = \frac{\omega_T-\omega_{T_0}}{\omega_{T_0}} = \frac{\omega_T}{\omega_{T_0}} - 1 \quad (116)$$

wyniesie

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{T_0}} = \sqrt{\frac{b_2\Delta T_0^2+b_3\Delta T_0+b_4}{b_4}} - 1. \quad (117)$$



Rys. 28. Przebieg $\frac{\omega_T}{\omega_{T_0}} = f(\Delta T_0)$ dla rozpatrywanego układu.



Rys. 29. Przebieg $\frac{\Delta\omega}{\omega_{T_0}} = f(\Delta T_0)$ dla rozpatrywanego układu.

Na rys. 28 i 29 przedstawiono wykresy przebiegów $\frac{\omega_T}{\omega_{T_0}} = f(\Delta T_0)$ oraz $\frac{\Delta\omega}{\omega_{T_0}} = f(\Delta T_0)$ dla rozpatrywanego przykładu. Z przebiegów wynika, że ze wzrostem temperatury otoczenia częstotliwość drgań maleje.

Temperaturowy współczynnik częstotliwości określony jest jako

$$\Lambda_T = \frac{1}{\omega_T} \frac{d\omega_T}{d(\Delta T_0)}\bigg|_{\Delta T_0 = 0} \tag{118}$$

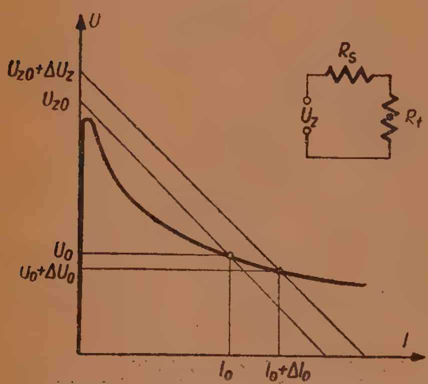
i (po uwzględnieniu (113)) wynosi

$$\Lambda_T = \frac{b_3}{2b_4}. \tag{119}$$

Λ_T posiada wartości ujemne. Dla rozpatrywanego układu ($b_1 = 13,5\ W^{-1}S^{-1}$, $b_2 = -7,15 \cdot 10^{-6} W^2 {}^\circ K^{-2}$, $b_3 = -0,241 \cdot 10^{-3} W^2 {}^\circ K^{-1}$, $b_4 = 6,3 \times 10^{-3} W^2$ Λ_T wynosi $-1,9\%/^\circ C$.

W p ł y w z m i a n n a p i ę c i a z a s i l a j ą c e g o.

Przedstawmy termistor wraz z układem polaryzującym w postaci obwodu zastępczego (rys. 30). Przy zmianie napięcia zasilającego z wartości U_{z0} do $U_{z0} + \Delta U_z$ statyczny punkt pracy przesunie się z punktu A do punktu A' o współrzędnych $U_0 + \Delta U_0$, $I_0 + \Delta I_0$. Nowe wartości napięcia i prądu wynoszą (patrz Dodatek 8)



Rys. 30. Wpływ zmian napięcia zasilającego na położenie statycznego punktu pracy.

$$U' = U_0 + \Delta U_0 = U_0 + \frac{r}{R_s + r} \Delta U_z, \tag{120}$$

$$I' = I_0 + \Delta I_0 = I_0 + \frac{1}{R_s + r} \Delta U_z, \tag{121}$$

wartości zaś parametrów termistora w punkcie A' odpowiednio wynoszą

— oporność

$$R' = A \exp \frac{a_1}{a_2 + c_1 \dfrac{\Delta U_z}{U_{z0}}}, \tag{122}$$

— współczynnik dynamiczności

$$F' = a_1 \frac{a_{10} + c_1 \dfrac{\Delta U_z}{U_{z0}}}{\left(a_2 + c_1 \dfrac{U_z}{U_{z0}}\right)^2}, \tag{123}$$

— indukcyjność

$$L' = a_{11} \frac{\left(a_{10} + c_1 \dfrac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right)\left(a_2 + c_1 \dfrac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right)^2}{\left[\left(a_2 + c_1 \dfrac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right)^2 + a_1 \left(a_{10} + c_1 \dfrac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right)\right]^2} \exp \frac{a_1}{a_2 + c_1 \dfrac{\Delta U_z}{U_{z0}}}, \tag{124}$$

przy czym a_1 i a_2 określone są przez (111),

$$\left.\begin{aligned} a_{10} &= P_0 \\ a_{11} &= 2\tau ABK \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

zaś

$$c_1 = U_{z0}\frac{U_0 + rI_0}{R_s + r}. \tag{126}$$

Podobnie jak przy rozpatrywaniu wpływu zmian temperatury otoczenia dochodzi się tu (patrz Dodatek 9) do następującej zależności częstotliwości wytwarzanych drgań od względnych zmian napięcia zasilającego

$$\omega_{U_z} = \sqrt{\left(d_1 + d_2\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right)\exp\left(\frac{-a_1}{a_2 + c_1\dfrac{\Delta U_z}{U_{z0}}}\right) - \left(d_3 - d_4\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right)^2}, \tag{127}$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{2BKP_0}{\tau AC(P_0 + KT_0)^2}, \\ d_2 &= c_1\frac{2BK}{\tau AC(P_0 + KT_0)^2}, \\ d_3 &= \frac{1}{\tau^2}\left[1 - \frac{BKP_0}{(P_0 + KT_0)^2}\right], \\ d_4 &= c_1\frac{BK}{\tau^2(P_0 + KT_0)^2} \end{aligned}\right| \tag{128}$$

są wartościami stałymi.

Analogicznie jak przy wpływie zmian temperatury otoczenia wyznacza się zależności

$$\frac{\omega_{U_z}}{\omega_{U_{z0}}} = f\left(\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right) \text{ oraz } \frac{\Delta\omega}{\omega_{U_{z0}}} = f\left(\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right).$$

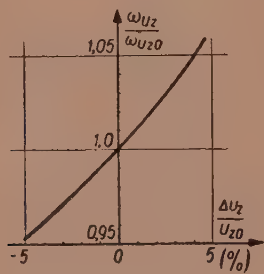
Przykładowe przebiegi podano na rys. 31 i 32. Częstotliwość wytwarzanych drgań wzrasta ze wzrostem napięcia zasilającego. Napięciowy współczynnik częstotliwości wynosi dla danego układu $\sim 1\%$ na 1% zmiany U_{z0}.

4.5. W y n i k i p o m i a r ó w.

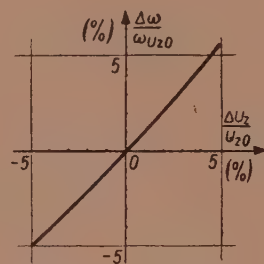
Zestawiono układ generatora $R_t \| (C - R_c)$ (rys. 33) na termistorze ZE7 (Zakład Elektroniki IPPT) o charakterystyce statycznej napięciowo-

prądowej podanej na rys. 4b. i danych w statycznym punkcie pracy przy temperaturze otoczenia 25°C: $U_0 = 5$ V, $I_0 = 0{,}4$ mA, $R = 12{,}5$ kΩ, $r = -4{,}8$ kΩ, $\tau = 2{,}52$ s, $L = 13500$ H. Termistor przebywał w ultratermostacie zezwalającym utrzymać stałą temperaturę otoczenia z dokładnością $\pm 0{,}02$ °C. Zmiany napięcia zasilającego były mniejsze od 0,1%.

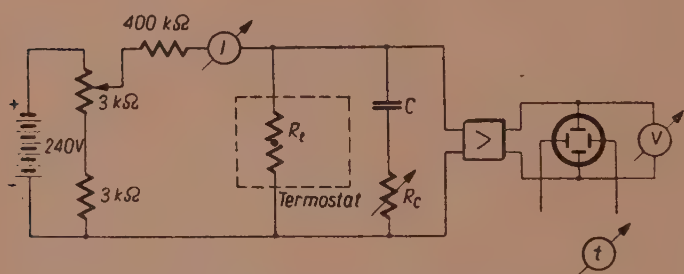
Przez zwiększenie wartości oporności R_c do 3,7 kΩ doprowadzono układ do stanu granicznego[3]. Następnie zmniejszając tłumienie obwodu



Rys. 31. Przebieg $\frac{\omega_{U_z}}{\omega_{U_{z_0}}} = f\left(\frac{\Delta U_z}{U_{z_0}}\right)$ dla rozpatrywanego układu.



Rys. 32. Przebieg $\frac{\Delta\omega}{\omega_{U_{z_0}}} = f\left(\frac{\Delta U_z}{U_{z_0}}\right)$ dla rozpatrywanego układu.



Rys. 33. Schemat układu pomiarowego.

odchodzono od stanu granicznego mierząc częstotliwość i narastające zniekształcenia. Częstotliwość drgań wyznaczono za pomocą sekundomierza zaś zawartość harmonicznych — metodą wykreślną. Wyniki przedstawiono w tablicy 4 i na rysunkach 34 i 35.

[3] Potrzebną oporność R_c dla doprowadzenia układu do stanu granicznego można określić za pomocą poniższego wzoru, otrzymanego z (155a) po uwzględnieniu warunku $R_{(k=1)} + r = 0$

$$R_c = -\frac{\omega^2 L^2 R + r(R-r)^2}{\omega^2 L^2 + (R-r)^2}. \tag{129}$$

Wyznaczone w ten sposób R_c dla $\omega_1 = 0{,}405$ s^{-1} wynosi 3,3 kΩ.

Tablica 4

Wyniki pomiarów zniekształceń i częstotliwości generatora $R_t \parallel (C - R_e)$

$R_e(\mathrm{k}\Omega)$	$3{,}7 = R_{gr}$	3,5	3,3	3,1	2,7	0,01
n_2 (%)		6	12	16	30	43
n_3 (%)		1	2	5	10	24
n_4 (%)			1	3	8	13
n_5 (%)			0,5	0,5	1,5	9
$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$	1	0,9911	0,9647	0,9280	0,7716	0,5407
$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$	1	0,996	0,982	0,963	0,879	0,735
$f\,(Hz)$	0,0645	0,0526	0,0518	0,0509	0,0464	0,0388
f zmierzone (Hz)	0,0528	0,0526	0,0520	0,050	0,0460	0,0388
δ (%)	22	0	$-0{,}4$	$-1{,}8$	0,9	0

Wartości obliczone:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{13500 \cdot 500 \cdot 10^{-6}}} = 0{,}385 \ \mathrm{s}^{-1},$$

$$f_0 = 0{,}0613 \ \mathrm{Hz},$$

$$q_L = (R - r)\sqrt{\frac{C}{L}} = (12{,}5 + 4{,}8) \cdot 10^3 \sqrt{\frac{500 \cdot 10^{-6}}{135000}} = 3{,}33,$$

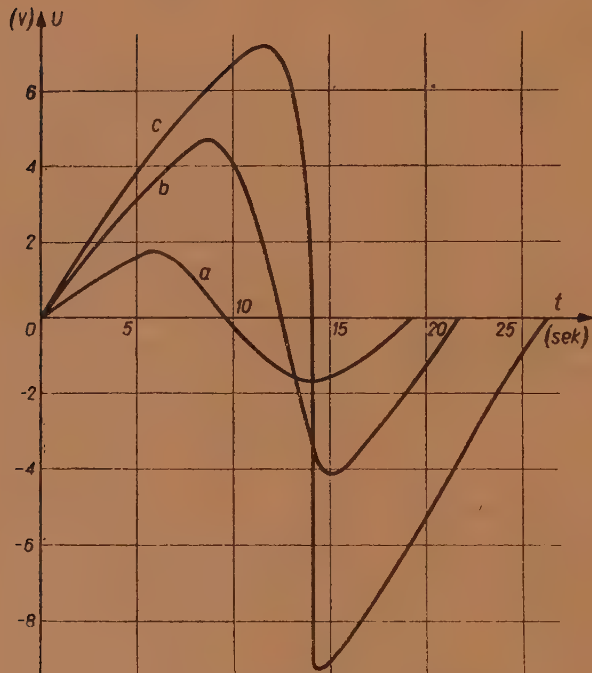
$$\omega_1 = \omega_0 \frac{q_L}{\sqrt{q_L^2 - 1}} = 0{,}385 \frac{3{,}33}{\sqrt{3{,}33^2 - 1}} = 0{,}405 \ \mathrm{s}^{-1},$$

$$q_L^2 - 1 = 10.$$

Częstotliwość graniczna zmierzona wynosiła $\omega_{1zm} = 0{,}332 \ \mathrm{s}^{-1}$. Różnica pomiędzy wartością wyliczoną i mierzoną wynosi $\sim 20\%$.

Częstotliwość ω liczono na podstawie dokładnego wzoru (103) rozwiązując wykreślnie (rys. 35) uzyskane zeń równanie

$$\frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2+10}=\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2-0{,}25}{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2+2{,}5}n_2^2+\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2-0{,}11}{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2+1{,}11}n_3^2+$$
$$+\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2-0{,}07}{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2+0{,}625}n_4^2+\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2-0{,}04}{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2+0{,}4}n_5^2 . \tag{130}$$

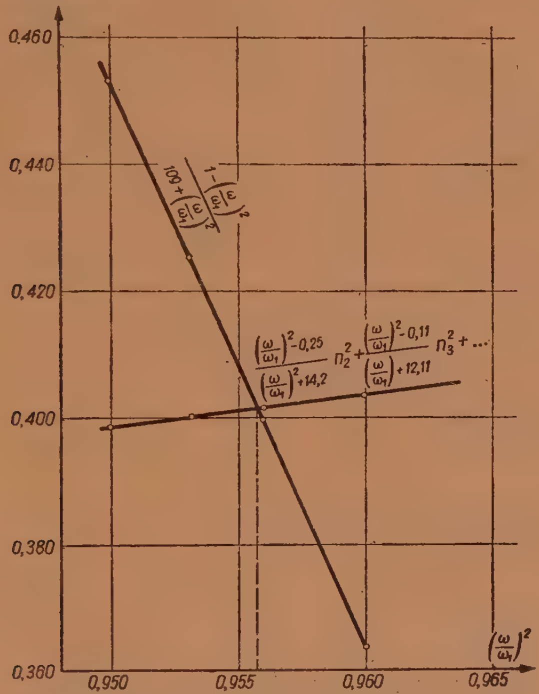


Rys. 34. Oscylogramy drgań
a) $R_c=3{,}5$ kΩ, $T=18{,}1$ s.
b) $R_c=2{,}7$ kΩ, $T=20.8$ s.
c) $R_c=0.01$ kΩ, $T=25.8$ s.

Pomierzono ponadto przy kilku wartościach pojemności C częstotliwości graniczne ω_1 dla dwóch termistorów typu ZE1 i ZE6 w układach $R_t\|C\|R_c$ i $R_t\|(C\ R_c)$ i porównano je z wartościami wyliczonymi; różnice nie przekraczały 15%.

Wpływy zmian temperatury otoczenia i napięcia zasilającego sprawdzono w układzie $R_t\|C\|R_c$ z termistorem A 1522 f-my Stantel o charakterystyce (rys. 4b) i parametrach zbliżonych do podanych w [4].

Mierzono zmiany częstotliwości przy zmianach temperatury i napięcia w granicach $\pm 5\%$. Uzyskane wyniki różniły się od wyliczonych wartości (rys. 28, 29, 31, 32) nie więcej niż 15%, przy czym żadnego regularnego odstępstwa nie zauważono.



Rys. 35. Przykład wykreślnego rozwiązania równania (103).

Jeżeli uwzględnić błędy wynikłe przy pomiarze poszczególnych parametrów termistora (zwłaszcza stałej czasowej), pojemności kondensatora, częstotliwości i zawartości harmonicznych, to można przyjąć iż zgodność pomiędzy podanymi w tej pracy zależnościami i doświadczeniem jest zupełnie zadowalająca.

W zakończeniu autor składa podziękowanie prof. Januszowi Groszkowskiemu za opiekę nad pracą oraz prof. Stanisławawi Ryżce, i Tadeuszowi Zagajewskiemu za jej przejrzenie i cenne uwagi.

Zakład Elektroniki IPPT.

WYKAZ LITERATURY

1. Biörk N., Davidson R.: *A study of thermistor circuits III.* Acta Politechnica, 1955, Nr 169.
2. Burgess R. E.: *The A. C. admitance of temperature sensitive circuits elements.* Proceedings Physical Society, B. 1955, s. 766.

3. Candy C. J. N.: *The specification of the properties of the thermistor as a circuit element in very low frequency systems*. Journal I. E. E., 1955, s. 398.
4. Ekelöf S., Kihlberg G.: *A study of thermistor circuits I*. Acta Politechnica 1954, Nr 142.
5. Groszkowski J.: *Zmiany częstotliwości a zawartość harmonicznych*. Przegląd Radiotechn. T. 10, z. 23/24, 1932 oraz T. 11 z. 1/2, 1933.
6. Groszkowski J.: *Wytwarzanie drgań elektrycznych*. PWT, 1958.
7. Hyde F. J.: *The impedance of the thermistor at low frequencies*. Journal of Electronics, 1955, s. 303.
8. Hyde F. J.: *Reactive effects in thermistors at very low frequencies*. British Communications and Electronics, 1957, s. 16.
9. Kuźma E.: *Pomiary temperatury za pomocą termistora*. Zeszyty Nauk. P. W. Elektryka, 1959, Nr 18.
10. Kuźma E.: *O pomiarze oporności termistora nie obciążonego*. Pomiary, Automatyka, Kontrola, 1959, Nr 6.
11. Kuźma E.: *Pomiar stałej czasu termistora*. Arch. Elektrot., 1959, T. 8, z. 1.
12. Ryżko S.: *Urządzenia radionadawcze*. M. O. N., 1956.
13. Smith O. J. M.: *Thermistors*. Review of Scientific Instruments, 1950, s. 344.
14. Stone J. E.: *An ultra low frequency oscilator*. Electronics, 1950, s. 94.

Dodatek 1

Rozkładając (31) na szereg Taylora [4] dostaje się

$$\Phi(U_0,I_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial U}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot u(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial I}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot i(t)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial U^2}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot u^2(t)+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial U\partial I}\bigg|_{U_0,I_0}\times\right.$$
$$\left.\times u(t)\cdot i(t)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial I^2}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot i^2(t)\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial U^3}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot u^3(t)+3\frac{\partial^3\Phi}{\partial^2 U\partial I}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot u^2(t)\cdot i(t)+\right.$$
$$\left.+3\frac{\partial^3\Phi}{\partial U\cdot\partial I^2}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot u(t)\cdot i^2(t)+\frac{\partial^3\Phi}{\partial I^3}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot i^3(t)\right)+\ldots+\frac{d}{dt}\left[\Psi(U_0,I_0)+\right.$$
$$+\frac{\partial\Psi}{\partial U}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot u(t)+\frac{\partial\Psi}{\partial I}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot i(t)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial U^2}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot u^2(t)+2\frac{\partial^2\Psi}{\partial U\partial I}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot u(t)\cdot i(t)+\right. \tag{131}$$
$$\left.+\frac{\partial^2\Psi}{\partial I^2}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot i^2(t)\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\Psi}{\partial U^3}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot u^3(t)+3\frac{\partial^3\Psi}{\partial U^2\cdot\partial I}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot u^2(t)\cdot i(t)+\right.$$
$$\left.\left.+3\frac{\partial^3\Psi}{\partial U\cdot\partial I^2}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot u(t)i^2(t)+\frac{\partial^3\Psi}{\partial I^3}\bigg|_{U_0,I_0}\cdot i^3(t)\right)+\ldots\right]=0\,.$$

Po wprowadzeniu do (131), w celu uproszczenia oznaczeń

$$\Phi_0=\Phi(U_0,I_0),\quad \Phi_U=\frac{\partial\Phi}{\partial U}\bigg|_{U_0,I_0},\quad \Phi_I=\frac{\partial\Phi}{\partial I}\bigg|_{U_0,I_0},\quad \Phi_{U^n}=\frac{\partial^n\Phi}{\partial U^n}\bigg|_{U_0,I_0},$$
$$\Phi_{I^n}=\frac{\partial^n\Phi}{\partial I^n}\bigg|_{U_0,I_0},\quad \Phi_{U^mI^n}=\frac{\partial^{m+n}\Phi}{\partial U^m\partial I^n}\bigg|_{U_0,I_0},\quad \Psi_0=\Psi(U_0,I_0),\quad \Psi_u=\frac{\partial\Psi}{\partial U}\bigg|_{U_0,I_0}, \tag{132}$$
$$\Psi_I=\frac{\partial\Psi}{\partial I}\bigg|_{U_0,I_0},\quad \Psi_{U^n}=\frac{\partial^n\Psi}{\partial U^n}\bigg|_{U_0,I_0},\quad \Psi_{I^n}=\frac{\partial^n\Psi}{\partial I^n}\bigg|_{U_0,I_0},\quad \Psi_{U^mI^n}=\frac{\partial^{m+n}\Psi}{\partial U^m\partial I^n},$$

otrzymuje się

$$\Phi_0 = \Phi_U \cdot u(t) + \Phi_I \cdot i(t) + \frac{1}{2}\left(\Phi_{U^2} \cdot u^2(t) + 2\Phi_{UI} \cdot u(t) \cdot i(t) + \Phi_{I^2} \cdot i^2(t)\right) + \frac{1}{6}\left(\Phi_{U^3} \cdot u^3(t) + \right.$$

$$\left. + 3\Phi_{U^2I} \cdot u^2(t) \cdot i(t) + 3\Phi_{UI^2} \cdot u(t) \cdot i^2(t) + \Phi_{I^3} \cdot i^3(t)\right) + \ldots + \frac{d}{dt}\left[\Psi_0 + \Psi_U \cdot u(t) + \Psi_I \cdot i(t) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\Psi_{U^2} \cdot u^2(t) + 2\Psi_{UI} \cdot u(t) \cdot i(t) + \Psi_{I^2} \cdot i^2(t)\right) + \frac{1}{6}\left(\Psi_{U^3} \cdot u^3(t) + 3\Psi_{U^2I} \cdot u^2(t) \cdot i(t) + \right. \quad (133)$$

$$\left.\left. + 3\Psi_{UI^2} \cdot u(t) \cdot i^2(t) + \Psi_{I^3} \cdot i^3(t)\right) + \ldots\right] = 0 .$$

Wyznaczając z (133) wyrazy z pochodnymi nie mniejszymi od drugiej oraz wyrazy stałe dochodzi się do równania

$$\left(\Phi_U + \frac{d}{dt}\Psi_U\right) \cdot u(t) + \left(\Phi_I + \frac{d}{dt}\Psi_I\right) \cdot i(t) + \Phi_0 + \xi = 0 , \quad (32)$$

w którym

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\Phi_{U^2} \cdot u^2(t) + 2\Phi_{UI} \cdot u(t) \cdot i(t) + \Phi_{I^2} \cdot i^2(t)\right) + \frac{1}{6}\left(\Phi_{U^3} \cdot u^3(t) + 3\Phi_{UI^2} \cdot u(t) \cdot i^2(t) + \right.$$

$$\left. + 3\Phi_{U^2I} \cdot u^2(t) \cdot i(t) + \Phi_{I^3} \cdot i^3(t)\right) + \ldots + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\Psi_{U^2} \cdot u^2(t) + 2\Psi_{UI} \cdot u(t) \cdot i(t) + \right.\right. \quad (134)$$

$$\left.\left. + \Psi_{I^2} \cdot i^2(t)\right) + \frac{1}{6}\left(\Psi_{U^3} \cdot u^3(t) + 3\Psi_{U^2I} \cdot u^2(t) \cdot i(t) + 3\Psi_{UI^2} \cdot u(t) \cdot i^2(t) + \Psi_{I^3} \cdot i^3(t)\right) + \ldots\right] .$$

Dodatek 2

Wielkość Φ_U można przedstawić [4] jako

$$\Phi_U = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial U}\right|_{U_0, I_0} = \frac{1}{\tau}\left.\left(\frac{\partial N}{\partial U} - \frac{\partial P}{\partial U}\right)\right|_{U_0, I_0} = \frac{1}{\tau}\left.\left(\frac{\partial N}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial U} - \frac{\partial P}{\partial U}\right)\right|_{U_0, I_0} . \quad (135)$$

Ponieważ (patrz wzór 9)

$$\left.\frac{\partial N}{\partial R}\right|_{U_0, I_0} = \frac{1}{q_0 R_0} , \quad (136)$$

a

$$\left.\frac{\partial U}{\partial R}\right|_{U_0, I_0} = \left.\frac{\partial P}{\partial U}\right|_{U_0, I_0} = I_0 , \quad (137)$$

więc wyrażenie (135) przedstawi się w postaci

$$\Phi_U = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{q_0 R_0 I_0} - I_0\right) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{q_0} \cdot \frac{1}{U_0} - I_0\right) .$$

W taki sposób wyraża się wielkość Φ_U za pomocą cieplnej stałej czasowej termistora, jego współczynnika mocowego oporności oraz napięcia i prądu w statycznym punkcie pracy. Analogicznie otrzymuje się

$$\left.\begin{aligned} \Phi_I &= -\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{q_0}\cdot\frac{1}{I_0}-U_0\right),\\ \Psi_{U} &= \frac{1}{q_0}\cdot\frac{1}{U_0},\\ \Psi_I &= -\frac{1}{q_0}\cdot\frac{1}{I_0}. \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Mając wyznaczone powyższe wielkości można ustalić, czemu są równe wartości elementów układu zastępczego, np. oporność R (wzór 37)

$$R=-\frac{\Psi_I}{\Psi_U}=-\left(-\frac{1}{q_0}\cdot\frac{1}{I_0}\right):\left(\frac{1}{q_0}\cdot\frac{1}{U_0}\right)=R_0 \tag{139}$$

jest równa oporności statycznej termistora itd.

Dodatek 3

Impedancja obwodu z rys. 25 dla k-tej harmonicznej wynosi

$$\hat{Z}_k=\frac{jk\omega LR_L}{R_L+jk\omega L}+\frac{-j\dfrac{R_c}{k\omega C}}{R_c-j\dfrac{1}{k\omega C}}=R+jX_k, \tag{140}$$

przy czym

$$R_L=R-r. \tag{141}$$

Reaktancja impedancji jest równa

$$X_k=\frac{k^3\omega^3R_c^2LC(CR_L^2-L)-k\omega R_L^2(CR_c^2-L)}{k^4\omega^4R_c^2L^2C^2+k^2\omega^2(L^2+C^2R_c^2R_L^2)+R_L^2}. \tag{142}$$

Po wprowadzeniu do (142) częstotliwości ω_0 i współczynników reaktancji (71), (81) i (82) otrzymuje się

$$X_k=\omega_0L\frac{k^3\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^3q_c^2(q_L^2-1)-k\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)q_L^2(q_c^2-1)}{k^4\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^4q_c^2+k^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2(1+q_c^2q_L^2)+q_L^2}. \tag{143}$$

Dla częstotliwości podstawowej X_1 wyniesie

$$X_1=\omega_0L\frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^3q_c^2(q_L^2-1)-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)q_L^2(q_c^2-1)}{\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^4q_c^2+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2(1+q_c^2q_L^2)+q_L^2}. \tag{144}$$

Z (144) można wyznaczyć częstotliwość ω_1 drgań w stanie granicznym, tj. przy zawartości harmonicznych dążących do zera; mianowicie z warunku $X_1=0$ otrzymuje się

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{q_L}{q_e} \sqrt{\frac{q_e^2 - 1}{q_L^2 - 1}} . \tag{80}$$

Wzór ten daje oczywiście te same wyniki co i wzory (78) i (79) podane w rozdziale 4.2.

Po zastąpieniu w (143) częstotliwości ω_0 częstotliwością graniczną ω_1

$$\omega_0 = \omega_1 \frac{q_e}{q_L} \sqrt{\frac{q_L^2 - 1}{q_e^2 - 1}} \tag{145}$$

dochodzi się do następującego wyrażenia na wartość reaktancji impedancji przy częstotliwości $k\omega$

$$X_k = e\omega_1 \frac{k^3 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^3 - k \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{ak^4 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^4 + k^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + b}, \tag{146}$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned} e &= L \frac{q_e^2 (q_L^2 - 1)}{1 + q_e^2 q_L^2} . \\ a &= q_L^2 \frac{q_e^2 - 1}{(q_L^2 - 1)(1 + q_e^2 q_L^2)} , \\ b &= q_e^2 \frac{q_L^2 - 1}{(q_e^2 - 1)(1 + q_e^2 q_L^2)} . \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

Dla częstotliwości podstawowej wzór (146) upraszcza się do postaci

$$X_1 = e\omega_1 \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^3 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{a \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + b} . \tag{148}$$

Po podstawieniu, w myśl zasady równowagi mocy urojonej harmonicznych, do zależności (95) wzoru (146) dostaje się

$$\sum_{k=1}^{\infty} ke\omega_1 \frac{k^3 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^3 - k \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{ak^4 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^4 + k^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + b} \cdot n_k^2 = 0 \tag{149}$$

i stąd

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 - 1}{ak^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + \frac{b}{k^2}} n_k^2 = 0 . \tag{97}$$

Dodatek 4

Oznaczając

$$\frac{\omega}{\omega_1}=1-x \tag{150}$$

i podstawiając tę wartość do (97) oraz pomijając, jako stosunkowo małe wyrazy x^2, x^3, x^4 uzyskuje się wyrażenie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-1-2k^2x}{ak^2+1+\frac{b}{k^2}-4ak^2x-2x}n_k^2=0, \tag{151}$$

które można przedstawić [4] w postaci przybliżonej jako

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k^2-1}{1+ak^2+\frac{b}{k^2}}+2\frac{(k^2-1)(2ak^2+1)-k^2\left(1+ak^2+\frac{b}{k^2}\right)}{\left(1+ak^2+\frac{b}{k^2}\right)^2}x\right]n_k^2=0. \tag{152}$$

Wyznaczając z (152) x i uwzględniając, że wielkość x jest równa wartości bezwzględnej względnego odchylenia częstotliwości od częstotliwości granicznej

$$x=1-\frac{\omega}{\omega_1}=-\frac{\omega-\omega_1}{\omega_1}=\div\frac{\Delta\omega}{\omega_1} \tag{153}$$

otrzymuje się wyrażenie (101) i (102).

Dodatek 5

Impedancja układu z rys. 26 przedstawia się jako

$$\hat{Z}_k=\frac{jk\omega LR_L}{R_L+jk\omega L}-j\frac{1}{k\omega C}+R_c=R_k+jX_k, \tag{154}$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned} R_k&=\frac{k^2\omega^2L^2(R_c+R_L)+R_cR_L^2}{k^2\omega^2L^2+R_L^2},\\ X_k&=\frac{k^2\omega^2L(CR_L^2-L)-R_L^2}{k\omega C(R_L^2+k^2\omega^2L^2)}.\end{aligned}\right\} \tag{155}$$

Moduł impedancji określony jest wzorem

$$|\hat{Z}_k|=\sqrt{\left[\frac{k^2\omega^2L^2(R_c+R_L)+R_cR_L^2}{k^2\omega^2L^2+R_L^2}\right]^2+\left[\frac{k^2\omega^2L(CR_L^2-L)-R_L^2}{k\omega C(R_L^2+k^2\omega^2L^2)}\right]^2} \tag{156}$$

[4] Wyrażenie pod znakiem sumy na wzorze (152) otrzymuje się z pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia wyrażenia pod znakiem sumy z wzoru (151). Pominięcie pozostałych wyrazów przy $x=0{,}1$ oraz $a=b=0{,}09$ $(q_c^2=q_L^2=11)$ powoduje błąd 1,7‰.

Wprowadzając do (155) częstotliwość ω_0 i współczynnik reaktancyjności (80) i (81) dostaje się

$$X_k = \sqrt{\frac{L}{C}\frac{k^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2(q_L^2-1)-q_L^2}{k\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left[k^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+q_L^2\right]}}, \tag{157}$$

oraz

$$X_1 = \sqrt{\frac{L}{C}\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2(q_L^2-1)-q_L^2}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+q_L^2\right]}}. \tag{158}$$

Przyrównując (158) do zera otrzymuje się wyrażenie na częstotliwość graniczną w postaci

$$\omega_1 = \omega_0\frac{q_L}{\sqrt{q_L^2-1}}, \tag{104}$$

w myśl zaś (95) otrzymuje się zależność pomiędzy częstotliwością i zawartością harmonicznych jako

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2-1}{k^2\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2+q_L^2-1}n_k^2=0, \tag{103}$$

Postępując podobnie jak przy obwodzie $R_t \,||\, C \,||\, R_c$ wzór (103) przekształca się do postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-1-2k^2x}{k^2+q_L^2-1-2k^2x}n_k^2=0 \tag{159}$$

i dalej

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k^2-1}{k^2+q_L^2-1}-2\frac{k^2q_L^2}{(k^2+q_L^2-1)^2}x\right]n_k^2=0, \tag{160}$$

przy czym x jest określone wzorami (150) i (153).

Z wyrażenia (160) otrzymuje się wzór (105).

Dodatek 6

Oporność termistora jest określona wzorem (16)

$$R = A\exp\frac{B}{\frac{P}{K}+T_0} \tag{16}$$

i jest funkcją obciążenia i temperatury otoczenia $R=f(P, T_0)$.

Logarytmując (16) i następnie różniczkując otrzymuje się

$$\lg R = \lg A + \frac{B}{\dfrac{P}{K} + T_0}, \tag{161}$$

$$\frac{dR}{R} = -\frac{B}{\left(\dfrac{P}{K}+T_0\right)^2}\left(\frac{dP}{K}+dT_0\right) = -\frac{BP}{K\left(\dfrac{P}{K}+T_0\right)^2}\left(\frac{dP}{P}+\frac{K}{P}dT_0\right). \tag{162}$$

Łatwo zauważyć, że wyrażenie $\dfrac{BP}{K\left(\dfrac{P}{K}+T_0\right)^2}$ jest równe współczynnikowi dynamiczności F

$$F = -\frac{P}{R}\frac{dR}{dP} = \frac{BP}{K\left(\dfrac{P}{K}+T_0\right)^2}, \tag{163}$$

a więc

$$\frac{dR}{R} = -\frac{F}{P}(dP + K dT_0). \tag{164}$$

Obciążenie termistora w statycznym punkcie pracy wynosi

$$P = R\frac{U_z^2}{(R+R_s)^2} \tag{165}$$

i przy stałej wartości napięcia zasilającego jest funkcją tylko oporności termistora.

Logarytmując (165) i następnie różniczkując dostaje się

$$\lg P = \lg R + 2\lg U - 2\lg(R+R_s), \tag{166}$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{dR}{R} - 2\frac{dR}{R+R_s} = \frac{dR}{R}\,\frac{R_s-R}{R_s+R}. \tag{167}$$

Podstawiając do (164) wyrażenie (167) mamy

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dT_0} = -\frac{KF}{P}\,\frac{R+R_s}{R_s(1+F)+R(1-F)}. \tag{168}$$

Zastępując różniczki skończonymi przyrostami i uwzględniając kształt obwodu otrzymuje się z (163) zależności (106) i (107) [1].

Obciążenie termistora w punkcie A' wyniesie

$$P_0' = (U_0+\Delta U_0)(I_0+\Delta I_0) = P_0 + \Delta P_0, \tag{169}$$

gdzie

$$\Delta P_0 = U_0\Delta I_0 + I_0\Delta U_0 + \Delta U_0\Delta I_0. \tag{170}$$

Po podstawieniu do (169) wielkości ΔU_0 i ΔI_0 z równań (106) i (107) otrzymuje się

$$P_0' = P_0 + \Delta T_0 FK\frac{R-R_s}{R_s(1+F)+R(1-F)} - \Delta T_0^2\frac{F^2K^2}{P_0}\,\frac{R R_s}{[R_s(1+F)+R(1-F)]^2}. \tag{171}$$

Zwykle dla zwiększenia stabilności układu polaryzującego stosuje się oporność R_s co najmniej kilkakrotnie większą od oporności statycznej termistora R. W tych warunkach w równaniu (171) można pominąć trzeci wyraz[5] i przyjąć, że

$$P_0' = m\Delta T_0 + P_0 , \tag{172}$$

gdzie

$$m = FK \frac{R - R_s}{R_s(1+F) + R(1-F)} . \tag{112}$$

Mając wyznaczoną nową wartość termistora wyznacza się[6] na podstawie wzorów (16), (163), (47c) wartości parametrów R', F' i L' (wzory 108, 109, i 110) odpowiadające temu obciążeniu wynikłemu z przyrostu temperatury otoczenia ΔT_0 i temperaturze $T_0 + \Delta T_0$.

Dodatek 7

Podstawiając wielkości R', F' i L' do wzoru (70) na częstotliwość wytwarzanych drgań, który w tym celu napiszemy w postaci

$$\omega = \omega_0 \frac{2F}{1+F} \sqrt{1 - R^2 \frac{C}{L} \left(\frac{1-F}{1+F}\right)^2} , \tag{173}$$

otrzymuje się następującą zależność częstotliwości wytwarzanych drgań od zmian temperatury otoczenia

$$\omega_T^2 = a_8 \frac{a_4 + a_5 \Delta T_0}{(a_2 + a_3 \Delta T_0)^2} \exp\left(\frac{-a_1}{a_2 + a_3 \Delta T_0}\right) - a_9 \left[1 - a_6 \frac{a_4 + a_5 \Delta T_0}{(a_2 + a_3 \Delta T_0)^2}\right]^2 . \tag{174}$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned} a_8 &= \frac{2K}{\tau AC} , \\ a_9 &= \frac{1}{\tau^2} . \end{aligned}\right\} \tag{175}$$

---

[5] Wartość błędu, wynikłego ze stosowania wzoru (172) obrazuje następujące przeliczenie

dla $P_0 = 24{,}8$ mW, $F = 1{,}97$, $K = 0{,}325 \frac{\text{mW}}{{}^\circ\text{C}}$ przy $\Delta T_0 = 10°K$ i $R_s = 10\ R$ otrzymuje się

wg — dokładnego wzoru (171)

$P_0' = 22{,}78$ mW

wg — przybliżonego wzoru (172)

$P_{01}' = 22{,}80$ mW

— błąd względny

$$\delta = \frac{P_{01}' - P_0'}{P'} 100\% \approx 0{,}09\%$$

a więc w zupełności pomijalny. Natomiast przy $R^s = R$ otrzymuje się

$P_0' = 24{,}39$ mW, $P_{01}' = 24{,}8$ mW i $\delta = 1{,}7\%$.

[6] Zakłada się tu niezmienność stałej czasowej termistora τ.

Równanie (174) można przedstawić [7] w następującej przybliżonej postaci

$$\omega_T^2 = \frac{a_8}{a_2^2} \exp\left(\frac{-a_1}{a_2}\right)(a_4 + a_5 \Delta T_0) - a_9 \left[1 - \frac{a_6}{a_2^2}(a_4 + a_5 \Delta T_0)\right]^2. \tag{176}$$

Przybliżenie powyższe dla zmian ΔT_0 rzędu kilku stopni wywołuje błąd nie większy od 5%, a przy $\Delta T < 2^0$K wartość błędu może być w zupełności pominięta.

Po niewielkich przekształceniach (176) otrzymuje się wzór (113).

Dodatek 8

Załóżmy, że zmiany napięcia ΔU_z nie przekraczają takich wartości, dla których można przyjąć, że odcinek charakterystyki statycznej $U=f(I)$ jest linią prostą; czyli przyjmuje się niezmienność na tym odcinku oporności przyrostowej termistora $r=\text{const}$.

Położenie prostej oporności R_s (rys. 36) określa równanie

$$U = -R_s I + U_{z0}, \tag{177}$$

położenie zaś odcinka charakterystyki statycznej termistora

$$U = rI + U_2, \tag{178}$$

przy czym

$$U_2 = -I_2 r. \tag{179}$$

Wartość I_2 przy znanej wartości r określa się z równania

$$r = \frac{U_0}{I_0 - I_2}, \tag{180}$$

skąd

$$I_2 = I_0 - \frac{U_0}{r}. \tag{181}$$

---

[7] W celu ewentualnego uproszczenia (174) prześledźmy wartości jego poszczególnych składników. Np. dla układu o danych

$A=0{,}674\,\Omega$, $B=3620^\circ$K, $K=0{,}325\,\frac{\text{mW}}{^\circ\text{C}}$, $\tau=0{,}61$ s, $P_0=24{,}8$ mW,

$m=-0{,}277\,\frac{\text{mW}}{^\circ\text{C}}$ ($R=11$ kΩ, $R_s=110$ kΩ), $C=160\,\mu$F otrzymuje się

$a_1=1{,}18$, $a_2=0{,}1217$, $a_3=0{,}048\cdot10^{-3}$, $a_4=89{,}8$, $a_5=-1{,}00$, $a_6=0{,}325\cdot10^{-3}$, $a_8=9{,}88$, $a_9=2{,}69$
$\omega_{T_0}=1{,}06$ s^{-1}

$$\omega_T^2 = 9{,}88\,\frac{(89{,}8-1{,}00\Delta T_0)}{(0{,}122+0{,}000048\Delta T_0)} \exp\left(\frac{-1{,}18}{0{,}122+0{,}000048\Delta T_0}\right) -$$

$$-2{,}69\left[1-0{,}325\cdot10^{-3}\,\frac{89{,}8-1{,}00\Delta T_0}{(0{,}122+0{,}000048\Delta T_0)^2}\right]^2.$$

Pomijając jako stosunkowo małe (przy $\Delta T_0 < 10^\circ$K) w porównaniu z 0,122 wyrazy $0{,}000048\Delta T_0$ otrzymuje się równanie (176).

Przy zmianie napięcia zasilającego do wartości $U_{z0}+\Delta U_z$ prosta oporu R_s przesunie się równolegle do punktu A'. Nową wartość prądu $I_0+\Delta I_0$ wyznacza się przyrównując do siebie prawe strony równań (177) i (178)

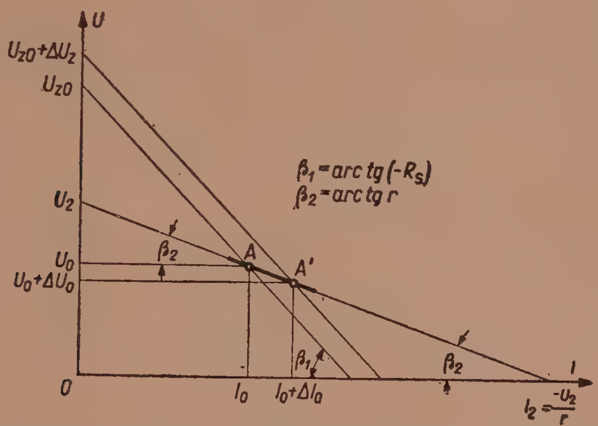
$$-R_s(I_0+\Delta I_0)+(U_{z0}+\Delta U_z)=r(I_0+\Delta I_0)+U_2, \tag{182}$$

skąd

$$I_0+\Delta I_0=\frac{(U_{z0}+\Delta U_z)-U_2}{R_s+r}. \tag{183}$$

Ponieważ według (179) i (181)

$$U_2=U_0-rI_0, \tag{184}$$



Rys. 36. Wyznaczenie przyrostów napięcia na termistorze i prądu termistora przy zmianie napięcia zasilającego.

więc

$$I_0+\Delta I_0\,\frac{(U_{z0}+\Delta U_z)-U_0+rI_0}{R_s+r}, \tag{185}$$

oraz

$$\Delta I_0=\frac{(U_{z0}+\Delta U_z)-U_0-I_0R_s}{R_s+r}. \tag{186}$$

Uwzględniając jeszcze, że

$$I_0R_s=U_{z0}-U_0, \tag{187}$$

(patrz rys. 36) otrzymuje się

$$\Delta I_0=\frac{\Delta U_z}{R_s+r} \tag{188}$$

i

$$\Delta U_0=r\Delta I_0=\frac{r\Delta U_z}{R_s+r}. \tag{189}$$

Obciążenie termistora po uwzględnieniu (120) i (121) wyniesie

$$P'=U_0I_0+\frac{U_0+rI_0}{R_s+r}\Delta U_z+\frac{r}{(R_s+r)^2}\Delta U_z^2. \tag{190}$$

Wprowadzając zaś względny przyrost napięcia $\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}$ otrzymuje się

$$P' = P_0 + U_{z0}\frac{U_0 + rI_0}{R_s + r}\frac{\Delta U_z}{U_{z0}} + U_{z0}^2\frac{r}{(R_s + r)^2}\left(\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right)^2. \tag{191}$$

Przy niewielkich wartościach $\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}$ można we wzorze (191) pominąć ostatni wyraz jako stosunkowo mały w porównaniu z pozostałymi i wtedy

$$P' = P_0 + U_{z0}\frac{U_0 + rI_0}{R_s + r}\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}. \tag{192}$$

Błąd wynikły z powyższego przybliżenia jest niewielki, np. dla układu o danych $U_{z0} = 182$ V, $U_0 = 16{,}6$ V, $I_0 = 1{,}5$ mA, $R_s = 110$ kΩ, $r = -3{,}6$ kΩ

przy $\frac{\Delta U_z}{U_{z0}} = 10\%$ wynosi $0{,}4\%$.

Ostatecznie więc zależność przyrostu obciążenia termistora od zmian napięcia zasilającego wyrażona jest jako

$$\Delta P = P' - P_0 = c_1\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}, \tag{193}$$

gdzie

$$c_1 = U_{z0}\frac{U_0 + rI_0}{R_s + r}, \tag{194}$$

jest wielkością stałą.

Uwzględniając wzór (193) na podstawie zależności (16), (163) i (47c) otrzymuje się wartości R', F' i L' (wzory 122, 123 i 124).

Dodatek 9

Podstawiając R', F' i L' do wzoru (173) otrzymuje się następującą zależność częstotliwości drgań od zmian napięcia zasilającego

$$\omega^2_{U_z} = a_{12}\frac{a_{10} + c_1\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}}{\left(a_2 + c_1\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right)^2}\exp\left(\frac{-a_1}{a_2 + c_1\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}}\right) - a_9\left[1 - a_1\frac{a_{10} + c_1\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}}{\left(a_2 + c_1\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right)^2}\right]^2 \tag{195}$$

w której

$$a_{12} = \frac{2BK}{\tau AC}. \tag{196}$$

Przy $\frac{\Delta U_z}{U_{z0}} < 10\%$ zależność (195) można przedstawić w prostszej postaci przybliżonej

$$\omega_{U_z} = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_2^2}\left(a_{10} + c_1\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right)\exp\left(\frac{-a_1}{a_2 + c_1\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}}\right) - a_9\left[1 - \frac{a_1}{a_2^2}\left(a_{10} + c_1\frac{\Delta U_z}{U_{z0}}\right)\right]^2} \tag{197}$$

stąd ostatecznie otrzymuje się wzór (127).

ГЕНЕРИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ТЕРМИСТОРОВ

В статье систематизированы и кратко обсуждены основные параметры и характеристики термистора, а также дана его эквивалентная схема.

Рассмотрена возможность генерирования колебаний при помощи термистора в системе $R_t \| C \| R_c$ (рис. 25) и $R_t \| (C-R_c)$ (рис. 26) с точки зрения линейной теории и нелинейной теории реактивного баланса мощности гармоник [5].

Получены следующие выражения на частоту критического режима и относительное отклонение частоты от критического режима вызванное появлением гармонических тока n_k

— для системы $R_t \| C \| R_c$

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{q_L}{q_c} \sqrt{\frac{q_c^2 - 1}{q_L^2 - 1}}, \tag{99}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_1} = -\frac{1}{2} \frac{\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1-k^2}{1+ak^2+b/k^2} n_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(k^2-1)(2ak^2+1)}{\left(1+ak^2+\frac{b}{k^2}\right)^2} - \frac{k^2}{\left(1+ak^2+\frac{b}{k^2}\right)} \right] n_k^2} \tag{191}$$

— для системы $R_t \| (C-R_c)$

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{q_L}{\sqrt{q_L^2 - 1}}, \tag{104}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_1} = -\frac{1}{2q_L^2} \frac{\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{k_2 - 1}{q_L^2 + k^2 - 1} n_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{q_L^2 + k^2 - 1} \right)^2 n_k^2}. \tag{105}$$

Исследовано влияние изменений температуры окружающей среды и питающего напряжения на постоянство частоты генератора. Температурный коэффициент частоты отрицателен, а его величина $\sim -2\%/{}^\circ C$.

Полученные результаты проверены опытным путем на конкретных схемах.

GENERATING OF AUTOOSCILLATION BY THERMISTORS

The author systemizes and briefly discusses the basic parameters and characteristics of the thermistor.

Linear and non-linear theory of balance of the reactive power of the harmonics involved [5] is applied to examine the possibility of generating by thermistor the autooscillation in the circuits $R_t \| C \| R_c$ (Fig. 25) and $R_t \| (C-R_a)$ (Fig. 26).

For the circuit the formulae as below denoting the frequency when operating at the limit condition and the relative deviation of the frequency at the limit conditions caused by the apperance of the current harmonics n_k are obtained for $R_t \| C \| R_c$

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{q_L}{q_c} \sqrt{\frac{q_c^2 - 1}{q_L^2 - 1}} \tag{99}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_1} = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-k^2}{1+ak^2+\frac{b}{k^2}} n_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(k^2-1)(2ak^2+1)}{\left(1+ak^2+\frac{b}{k^2}\right)^2} - \frac{k^2}{\left(1+ak^2+\frac{b}{k^2}\right)} \right] n_k^2} \tag{101}$$

for $R_t \| (C - R_c)$

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{q_L}{\sqrt{q_L^2 - 1}} \tag{104}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_1} = -\frac{1}{2q_L^2} \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2-1}{q_L^2+k^2-1} n_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{q_L^2+k^2-1}\right)^2 n_k^2} \tag{105}$$

The infuence of the surroundings temperature and gridvoltage on the stability of the frequency of generator is examined. The frequency coefficient of temperature is negative and equals — 2%o C. The results obtained have been verified experimentally for specific circuits.

A R C H I W U M E L E K T R O T E C H N I K I

TOM X ZESZYT 1 1961

621.396.622.63

A. AMBROZIAK

Projektowanie diod germanowych z cienką bazą

Rękopis dostarczono 6.6.1960 r.

Germanowe diody szybkoprzełączające przeznaczone do pracy w układach impulsowych powinny posiadać jak najmniejsze grubości obszarów p i n w złączu. Dla takich diod nie mogą być stosowane wyniki teorii złącza p-n podanej przez Shockleya, ponieważ zakłada ona nieskończenie długie obszary p i n. W ten sposób nie uwzględnia ona wpływu kontaktów nieprostujących, jakie tworzą metalowe elektrody z obszarami półprzewodnika, na parametry złącza p-n. Przy grubościach obszarów p i n stosowanych w diodach szybkoprzełączających, wpływ ten może być bardzo duży. W ostatnich latach powstały prace teoretyczne uwzględniające wpływ kontaktów nieprostujących na parametry złącza p-n. W niniejszym artykule podano w oparciu o te prace zależności wiążące bezpośrednio parametry fizyczne i konstrukcyjne diod z ich parametrami elektrycznymi. Zależności te są słuszne dla złącz wykonywanych metodą stopową na germanie typu n. Zostały one przeliczone dla pewnego zakresu parametrów diod i przedstawione w postaci graficznej. Dzięki temu mogą one być łatwo wykorzystywane przy projektowaniu diod przeznaczonych do pracy w układach impulsowych. Ograniczono się tutaj do parametrów określających przydatność diody do pracy w układach przełączających przy dużych sygnałach. Parametrami tymi są wszystkie parametry statycznej charakterystyki prądowo napięciowej oraz czasy ustalania się wartości parametrów statycznych przy gwałtownym przełączaniu diody z jednego stanu pracy w drugi, tzn. czas przełączania z kierunku przewodzenia na kierunek zaporowy i czas przełączania z kierunku zaporowego na kierunek przewodzenia.

1. WSTĘP

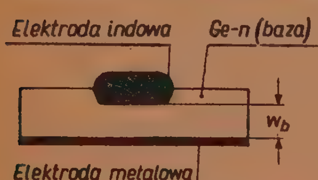
Teoria złącza p-n rozwinięta przez Shockleya wprowadzała między innymi założenie, że grubości obszarów p i n półprzewodnika, które tworzą złącze p-n, są dużo większe od długości dróg dyfuzji nośników mniejszościowych w tych obszarach [14 i 15]. Przy takim założeniu nadmiarowe nośniki mniejszościowe wprowadzone przez złącze, poruszając się ruchem dyfuzyjnym w kierunku metalowych elektrod, ulegają całkowicie rekombinacji w głębi półprzewodnika, zanim zdążą dotrzeć do tych elektrod. Dzięki temu własności elektrod nie wywierają wpływu na działanie i parametry złącza p-n.

Jak wykazały późniejsze prace teoretyczne i doświadczalne, dla uzyskania diod o możliwie najlepszych parametrach przy pracy w układach impulsowych, jak również dla podniesienia częstotliwości granicznej diod, pożądane jest zmniejszenie grubości obszarów p i n na tyle, na ile pozwala technologia, tak aby stosunek grubości tych obszarów do długości dróg dyfuzji nośników mniejszościowych w tych obszarach był jak najmniejszy [5, 11, 13, 16]. Jest to warunek całkowicie przeciwstawny do założenia Shockleya i dla takich diod nie mogą być stosowane wyniki podanej przez niego teorii złącza p-n. W tym przypadku bardzo istotny wpływ na parametry złącza p-n wywierają własności kontaktów nieprostujących (zwanych kontaktami omowymi), jakie tworzy półprzewodnik z metalowymi elektrodami. Ze względu na duże znaczenie praktyczne diod germanowych z małą odległością złącza p-n od kontaktów omowych, powstały prace teoretyczne uwzględniające wpływ kontaktów omowych na parametry złącza p-n [11, 13].

W niniejszej pracy opartej na teorii złącza z cienkimi obszarami p i n, będą podane zależności wiążące bezpośrednio parametry fizyczne i konstrukcyjne diod z ich parametrami elektrycznymi. Zależności te zostały przeliczone dla pewnego zakresu parametrów diod i będą przedstawione w postaci graficznej. Dzięki temu, mogą one być łatwo wykorzystywane do projektowania diod przeznaczonych do pracy w układach impulsowych przy dużych sygnałach.

2. STRUKTURA DIODY

Omówimy najpierw strukturę diody, dla której słuszne są podane zależności i przeprowadzone obliczenia. Na rys. 1 przedstawiono schematycznie konstrukcję diody.



Rys. 1. Struktura diody ze złączem stopowym.

Złącze wykonane jest na płytce germanowej typu n, zwanej bazą. Obszar typu p wykonany jest metodą stopową. Po drugiej stronie płytki typu n wykonana jest elektroda metalowa tworząca z obszarem typu n kontakt omowy. Odległość złącza p-n od kontaktu omowego, czyli grubości bazy, wynosi w_b.

Dla poszczególnych obszarów złącza p-n przyjmuje się następujące założenia.

1. obszar typu p posiada znacznie większą przewodność właściwą niż obszar typu n, tzn. $p_p \gg n_n$, gdzie p_p jest to koncentracja dziur w obszarze typu p, a n_n koncentracja elektronów w obszarze typu n, w warunkach równowagi termicznej;

2. czas życia dziur τ_p w obszarze n jest tego rzędu co i czas życia elektronów τ_n w obszarze typu p;

3. napięcie zewnętrzne przyłożone do diody występuje całkowicie na złączu p-n; spadek napięcia w bazie jest pomijalny;

4. koncentracje mniejszościowych nośników nadmiarowych, występujące po przyłożeniu napięć, są dużo mniejsze od koncentracji nośników większościowych w warunkach równowagi termicznej;

5. kontakt omowy z bazą scharakteryzowany jest przez szybkość rekombinacji dziur na kontakcie s. Wielkość s zdefiniowana jest jako stosunek gęstości prądu w płaszczyźnie kontaktu omowego do przyrostu koncentracji dziur w tej płaszczyźnie, przy przepływie tego prądu

$$s = \frac{I}{p - p_n} \quad [\mathrm{cm/s}]$$

gdzie

I — gęstość prądu dziurowego w płaszczyźnie kontaktu omowego $[\mathrm{A/cm^2}]$,

p — koncentracja dziur w płaszczyźnie kontaktu omowego przy przepływie prądu I $[\mathrm{C/cm^3}]$

p_n — koncentracja dziur w bazie, w warunkach równowagi termicznej $[\mathrm{C/cm^3}]$.

Pierwsze dwa założenia pozwalają nie uwzględniać elektronowej składowej prądu, tzn. można przyjąć, że praktycznie cały prąd płynący przez złącze p-n jest przenoszony przez dziury.

Założenie trzecie mówi, że poza granicami warstwy zaporowej pole elektryczne nie istnieje, tak że prąd dziurowy w bazie jest wyłącznie prądem dyfuzyjnym.

Powyższe założenia są dostatecznie dobrze spełnione w germanowych diodach stopowych oraz w diodach z ostrzem złotym (gold bonded), które są typowymi diodami przeznaczonymi do pracy w układach impulsowych.

3. CHARAKTERYSTYKA PRĄDOWO NAPIĘCIOWA

Omówimy najpierw zależność parametrów statycznej charakterystyki prądowo-napięciowej diody od fizycznych i konstrukcyjnych parametrów diody. Na rys. 2 przedstawiono taką charakterystykę. Można ją opisać za pomocą czterech podstawowych parametrów.

Maksymalne napięcie, jakie można przyłożyć do diody w kierunku zaporowym, tzw. napięcie przebicia, oznaczono na rysunku symbolem U_m. Prąd wsteczny przy napięciach mniejszych od napięcia przebicia, tzw. prąd nasycenia, oznaczono przez I_s. Wartość napięcia, przy której charakterystyka w kierunku przewodzenia wchodzi w zakres prostoliniowy, oznaczono przez φ. Ostatnim ważnym parametrem jest nachylenie prostoliniowego odcinka charakterystyki w kierunku przewodzenia. Okre-

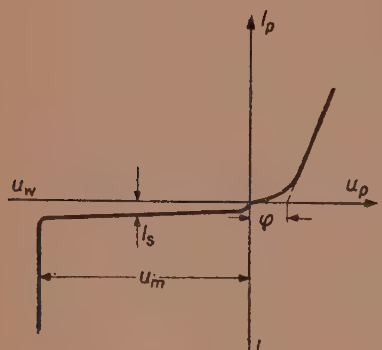
śla ono wartość oporności diody w tym zakresie charakterystyki, tzw. oporności rozproszenia, która zależy głównie od oporności bazy R_b.

Oczywiście, aby charakterystyka diody była jak najbardziej zbliżona do charakterystyki idealnej, napięcie U_m powinno być jak największe, natomiast napięcie φ, prąd I_s oraz oporność rozproszenia powinny być jak najmniejsze. W następnych punktach omówimy kolejno zależność wprowadzonych tu parametrów charakterystyki prądowo-napięciowej, od fizycznych i konstrukcyjnych parametrów diody.

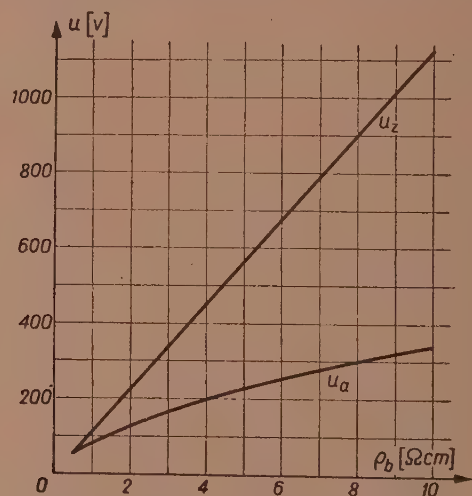
3.1. Napięcie przebicia.

Wartość napięcia przebicia U_m zależy od tego, jakie zjawisko fizyczne jest przyczyną przebicia. Znane są trzy zjawiska powodujące przebicie i będą one kolejno omówione.

Pierwszy proces znany jest w literaturze jako efekt Zenera. Polega on na tym, że po przyłożeniu do półprzewodnika pola elektrycznego o dostatecznie dużym natężeniu następuje zrywanie wiązań między atomami siatki krystalicznej i przechodzenie elektronów z pasma podstawowego do pasma przewodnictwa. Jest to przyczyną gwałtownego wzrostu prądu w momencie przebicia. Wartość napięcia przebicia U_z związana



Rys. 2. Statyczna charakterystyka prądowo napięciowa diody germanowej.



Rys. 3. Zależność napięcia Zenera U_z oraz napięcia przebicia lawinowego U_a od oporności właściwej germanu w obszarze bazy ϱ_b.

z efektem Zenera jest proporcjonalna do oporności właściwej germanu w obszarze bazy. Związek między tymi wielkościami dany jest przez równanie (1). Jest to zależność ustalona na drodze empirycznej [7]:

$$U_z = 112{,}5 \cdot \varrho_b \ [\mathrm{V}], \tag{1}$$

gdzie

U_z — napięcie Zenera [V],

ϱ_b — oporność właściwa germanu w obszarze bazy [Ω cm].

Innym procesem ograniczającym napięcie U_m jest tzw. przebicie lawinowe. Polega ono na tym, że przy dostatecznie dużej różnicy potencjałów na średniej drodze swobodnej nośników, mogą one uzyskiwać energie wystarczające do uwalniania nowych nośników, w wyniku zderzeń z atomami sieci. Lawinowe narastanie koncentracji nośników po przekroczeniu krytycznej wartości napięcia wywołuje gwałtowny wzrost prądu. Związek między napięciem przebicia lawinowego U_a i opornością właściwą germanu w obszarze bazy ϱ_b, dany jest przez równanie (2). Jest to również zależność ustalona na drodze empirycznej [10]

$$U_a = 84 \cdot \varrho_b^{0,61} \text{ [V]} \qquad (2)$$

gdzie

U_a — napięcie przebicia lawinowego [V],

ϱ_b — oporność właściwa germanu w obszerze bazy [Ω cm].

Zależności (1) i (2) przedstawiono na rys. 3. Jak widzimy, przy opornościach właściwych germanu większych od 0,5 Ωcm, napięcie przebicia lawinowego U_a jest niższe od napięcia Zenera U_z i ono ogranicza wartość napięcia U_m.

W diodach z cienką bazą napięcie U_m może być ograniczone do jeszcze niższej wartości, niż to wynika z równania (2). Jak wiadomo, grubość warstwy ładunku przestrzennego w obydwu obszarach złącza *p-n* jest tym większa, im większe są oporności właściwe tych obszarów oraz im większe jest napięcie polaryzacji złącza w kierunku zaporowym. Przy dostatecznie wysokim napięciu w kierunku zaporowym, warstwa ładunku przestrzennego może stać się tak gruba, że dojdzie do metalowych elektrod powodując bezpośrednie zwarcie między nimi.

W diodach, dla których słuszne jest założenie 1 wprowadzone w rozdz. 2, grubość warstwy ładunku przestrzennego w bazie typu *n* jest dużo większa niż w rekrystalizowanym obszarze typu *p*. W takich diodach, przy jednakowych grubościach obydwu obszarów złącza, zwarcie obszaru bazy występuje przy niższym napięciu. Związek między grubością warstwy ładunku przestrzennego w obszarze bazy typu *n*, opornością właściwą germanu w tym obszarze oraz napięciem wstecznym przyłożonym do złącza, dany jest przez równanie (3), wynikające z rozwiązania równania Poissona [13],

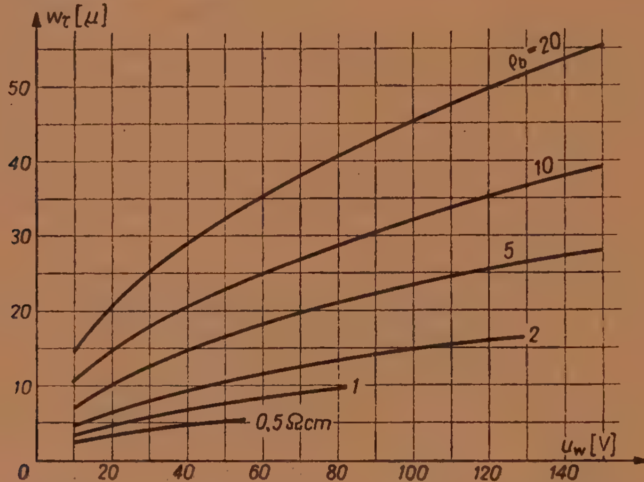
$$W_\tau = 1,02 \sqrt{\varrho_b \cdot U_W} \; [\mu] \qquad (3)$$

gdzie

W_τ — grubość warstwy ładunku przestrzennego w obszarze bazy [μ],

ϱ_b — oporność właściwa germanu w obszarze bazy typu n [Ωcm],
U_w — napięcie wsteczne przyłożone do złącza [V].

Na rys. 4 przedstawiono zależności grubości warstwy ładunku przestrzennego od napięcia polaryzacji diody w kierunku zaporowym, obliczoną według równania (3), przy różnych stałych wartościach oporności właściwej germanu w obszarze bazy.



Rys. 4. Zależność grubości warstwy ładunku przestrzennego w obszarze bazy W_τ od napięcia wstecznego U_w, przy różnych opornościach właściwych germanu w obszarze bazy ϱ_b.

Jeśli przy projektowaniu diody jest narzucona z góry wartość napięcia przebicia U_m, obliczamy wartość oporności właściwej germanu w obszarze bazy, niezbędną dla uzyskania tego napięcia według równania (2), lub według równania (1) — jeśli wartość oporności wynikająca z równania (2) będzie mniejsza od 0,5 Ωcm. Następnie z równania (3) musimy obliczyć minimalną grubość bazy $W_b = W_\tau$ jaką może posiadać dioda wykonana na germanie o obliczonej oporności właściwej, jeśli napięcie przebicia związane z rozszerzeniem warstwy ładunku przestrzennego aż do kontaktu omowego ma posiadać wartość nie mniejszą niż żądana wartość U_m.

Prąd nasycenia

Według teorii Shockleya, dla złącza o dostatecznie długich obszarach p i n w stosunku do dróg dyfuzji nośników mniejszościowych w tych obszarach, prąd wsteczny przy napięciach niższych od napięcia przebicia U_m jest niezależny od wartości napięcia i dany przez równanie

$$I_{s0} = q\left(\frac{D_p \cdot p_n}{L_p} + \frac{D_n \cdot n_p}{L_n}\right) \quad [\mathrm{A/cm^2}], \tag{4}$$

gdzie

q — ładunek elektronu [C],
D_p — stała dyfuzji dla dziur [cm²/s],
D_n — stała dyfuzji dla elektronów [cm²/s],
p_n — koncentracja dziur w obszarze n w warunkach równowagi termicznej [cm^{-3}],
n_p — koncentracja elektronów w obszarze p w warunkach równowagi termicznej [cm^{-3}],
L_p — droga dyfuzji dziur w obszarze n [cm],
L_n — droga dyfuzji elektronów w obszarze p [cm].

Drogi dyfuzji związane są z czasami życia nośników mniejszościowych w obydwu obszarach złącza zależnością

$$L_p = \sqrt{D_p \cdot \tau_p}\,, \qquad L_n = \sqrt{D_n \cdot \tau_n} \quad [\mathrm{cm}]\,, \tag{5}$$

gdzie

τ_p — czas życia dziur w obszarze n [s],
τ_n — czas życia elektronów w obszarze p [s].

Podstawiając wyrażenia (5) do równania (4), otrzymujemy na prąd nasycenia wyrażenie

$$I_{s0} = q\left(p_n \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} + n_p \sqrt{\frac{D_n}{\tau_n}}\right) \ [\mathrm{A/cm^2}] \tag{6}$$

Powołując się na dwa pierwsze założenia wprowadzone w rozdziale 2 i pamiętając, że dla złącza w stanie równowagi termicznej słuszna jest zależność $n_n \cdot p_n = p_p \cdot n_p$ można łatwo wykazać, że $p_n \gg n_p$. Dzięki temu składową elektronową prądu w wyrażeniach (4) i (6) można pominąć, tak że wyrażenie na prąd nasycenia przyjmie następującą postać

$$I_{s0} \approx \frac{q\, p_n D_p}{L_p} = q\, p_n \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} \quad [\mathrm{A/cm^2}] \tag{7}$$

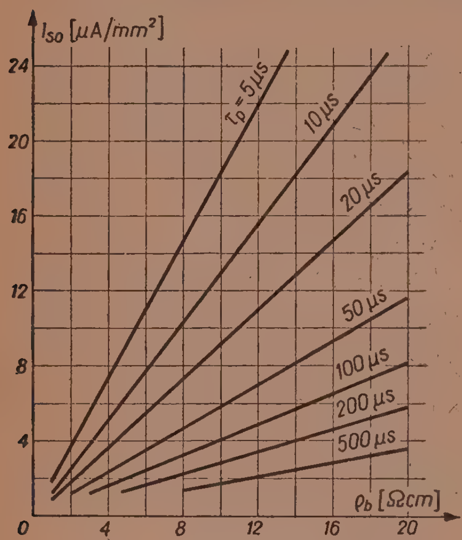
Wyznaczymy teraz p_n w zależności od oporności właściwej germanu w obszarze bazy. Jak wiadomo, dla półprzewodników o wyraźnie domieszkowym przewodnictwie, w stanie równowagi termicznej słuszna jest zależność

$$n_n \cdot p_n = n_i^2\,, \tag{8}$$

gdzie

n_n — koncentracja elektronów w obszarze n [cm^{-3}],
p_n — koncentracja dziur w obszarze n [cm^{-3}],
n_i — koncentracja par elektron — dziura w półprzewodniku samoistnym [cm^{-3}].

Dla germanu w temperaturze pokojowej $n_i^2 = 6{,}3 \cdot 10^{26}$ [cm^{-6}]. Z drugiej strony, wyrażenie na oporność właściwą germanu w obszarze bazy ma następującą postać:



Rys. 5. Zależność gęstości prądu nasycenia złącza I_{so} od oporności właściwej germanu w obszarze bazy ϱ_b przy różnych wartościach czasu życia dziur w obszarze bazy τ_p.

$$\varrho_b = \frac{1}{q n_n \cdot \mu_n}, \tag{9}$$

gdzie

μ_n — ruchliwość elektronów [cm^2/Vs].

Z równań (8) i (9) otrzymujemy

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n} = n_i^2 \cdot q \cdot \mu_n \cdot \varrho_b .$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy $p_n = 3 \cdot 8 \cdot 10^{11} \varrho_b$ [cm^{-3}]. Dla μ_n przyjęto wartość 3800 cm^2/Vs, prawie stałą dla oporności większych od 0,5 Ωcm.

Ostatecznie wyrażenie na prąd nasycenia przyjmuje postać następującą:

$$I_{s0} = 6{,}1 \cdot 10^{-8} \varrho_b \frac{D_p}{L_p} = 6{,}1 \cdot 10^{-8} \varrho_b \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} \quad [\mathrm{A/cm^2}], \tag{10}$$

Na rys. 5 przedstawiono zależność gęstości prądu nasycenia I_{s0} od oporności właściwej germanu ϱ_b wyznaczoną z równania (10) przy różnych stałych wartościach czasu życia τ_p.

Dla diod, w których grubość bazy jest mniejsza od długości drogi dyfuzji nośników mniejszościowych, wyrażenie uwzględniające wpływ szybkości rekombinacji na kontakcie omowym na wartość prądu nasycenia, dane jest przez równanie (11,13):

$$I_s = I_{s0} \frac{D_p \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{W_b}{L_p}\right) + sL_p \mathrm{ch}\left(\frac{W_b}{L_p}\right)}{D_p \cdot \mathrm{ch}\left(\frac{W_b}{L_p}\right) + sL_p \mathrm{sh}\left(\frac{W_b}{L_p}\right)} \quad [\mathrm{A/cm^2}], \tag{11}$$

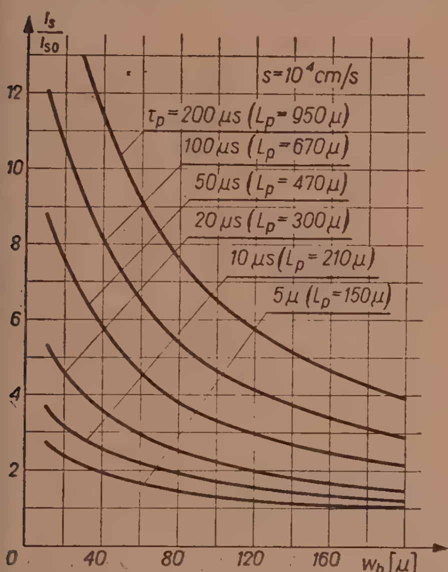
gdzie

I_{s0} — gęstość prądu nasycenia dana równaniem (10),
W_b — grubość bazy,
s — szybkość rekombinacji powierzchniowej na kontakcie omowym.

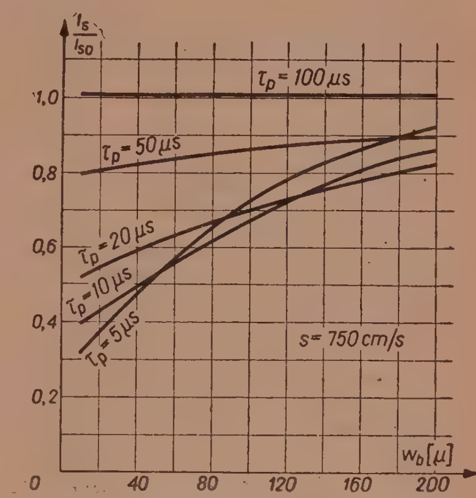
Z wyrażenia tego wynika, że w ogólnym przypadku wartość prądu nasycenia diody zależy od szybkości rekombinacji na kontakcie omowym s i grubości bazy w_b, przy niezmienionych własnościach półprzewodnika.

Wyniki badań doświadczalnych wykazują, że minimalne wartości szybkości rekombinacji s, jakie można uzyskać w praktyce na kontakcie omowym, są rzędu 750 cm/s, natomiast maksymalne wynoszą 10^4 cm/s [13, 11].

Dla tych dwóch wartości szybkości rekombinacji s obliczono z równania (11) stosunek prądów I_s/I_{s0} w funkcji grubości bazy w_b przy różnych stałych wartościach czasu życia nośników w obszarze bazy τ_p. Zależności te przedstawiono na rys. 6 i 7.



Rys. 6. Zależność prądu wstecznego złącza (w jednostkach względnych) od grubości bazy W_b przy różnych wartościach czasu życia dziur w obszarze bazy τ_p dla dużej wartości szybkości rekombinacji na kontakcie omowym s.



Rys. 7. Zależność prądu wstecznego złącza (w jednostkach względnych) od grubości bazy W_b przy różnych wartościach czasu życia dziur w obszarze bazy τ_p dla małej wartości szybkości rekombinacji na kontakcie omowym s.

Jak widzimy na rys. 6, przy dużych wartościach s stosunek prądów I_s/I_{s0} jest większy od jedności i rośnie w miarę zmniejszania grubości bazy. Przy stałej grubości bazy rośnie on również że wzrostem czasu życia nośników w obszarze bazy, a więc przy zmniejszaniu stosunku grubości bazy do długości drogi dyfuzji nośników mniejszościowych w obszarze bazy.

Przy małych wartościach s, jak to przedstawiono na rys. 7, stosunek prądów I_s/I_{s0} może być mniejszy od jedności i zmniejszać się przy zmniejszaniu grubości bazy w_b. Przy stałej grubości bazy stosunek ten

posiada minimalną wartość dla pewnej wartości czasu życia nośników mniejszościowych w obszarze bazy.

Przy odpowiednio dobranej długości drogi dyfuzji nośników mniejszościowych w obszarze bazy L_p, dla danej wartości szybkości rekombinacji na kontakcie s, stosunek prądów I_s/I_{s0} będzie niezależny od grubości bazy w_b. Jak wynika z równania (11), związek między tymi wartościami jest $s \cdot L_p = D_p$.

Należy podkreślić, że w równaniu (11) oraz na wykresach z rys. 6 i 7 występuje efektywna grubość bazy w_b, tzn. odległość od warstwy ładunku przestrzennego w obszarze bazy do kontaktu omowego. W związku z tym, przy zmianie grubości warstwy ładunku przestrzennego w wyniku zmiany napięcia wstecznego, zgodnie z równaniem (3), ulega również zmianie o taką samą wartość efektywna grubość bazy, a więc i stosunek prądów I_s/I_{s0}. Z tego względu wartość prądu wstecznego w diodach z cienką bazą, wynikająca z równania (11), jest zależna od napięcia wstecznego, w odróżnieniu od wartości prądu nasycenia I_{s0}, jaka wynika z teorii Shockleya.

Wysokość bariery potencjału w złączu.

Nieliniowość charakterystyki prądowo-napięciowej diody w otoczeniu początku układu współrzędnych spowodowana jest istnieniem bariery potencjału w złączu. Minimalna wartość napięcia, przy której charakterystyka w kierunku przewodzenia może wejść w zakres prostoliniowy, równa jest właśnie wysokości bariery potencjału φ. Wysokość bariery potencjału w złączu p-n, określona jest przez różnicę położeń poziomu Fermiego w germanie o takich wartościach oporności właściwej, jakie posiadają obszary tworzące złącze i dana jest przez równanie [15]

$$\varphi = \frac{kT}{q} \ln \frac{p_p n_n}{n_i^2} \quad [\mathrm{V}], \tag{12}$$

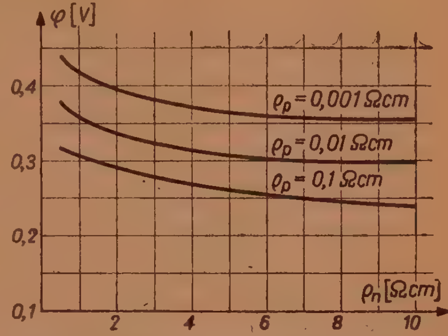
gdzie

k — stała Boltzmana [Ws/°K],
T — temperatura w skali bezwzględnej,
q — ładunek elektronu [C],
p_p — koncentracja dziur w obszarze p [cm^{-3}],
n_n — koncentracja elektronów w obszarze n [cm^{-3}],
n_i — koncentracja par elektron dziura w półprzewodniku samoistnym [cm^{-3}].

Po podstawieniu wartości liczbowych dla germanu w temperaturze 300°K, równanie (12) przybierze postać

$$\varphi = 0{,}026 \ln \frac{p_p n_n}{6{,}3.10^{26}} \quad [\mathrm{V}]. \tag{13}$$

Na rys. 8 przedstawiono zależność φ od oporności właściwej obszarów **p i n**, dla zakresu spotykanego w diodach stopowych. Należy dodać, że po przekroczeniu wartości napięcia bariery φ charakterystyka nie staje się idealnie prostoliniowa, ponieważ ze wzrostem prądu zachodzi jednocześnie obniżanie wartości oporności właściwej germanu w obszarze bazy, związane ze wzrostem koncentracji nadmiarowych nośników mniejszościowych. Jednak po przekroczeniu napięcia φ nieliniowość charakterystyki związana tylko ze zmianą oporności właściwej w obszarze bazy jest już znacznie mniejsza.



Rys. 8. Zależność wysokości bariery potencjału w złączu φ od oporności właściwej germanu w obszarze bazy ϱ przy różnych wartościach oporności właściwej germanu w obszarze rekrystalizowanym ϱ_p.

Oporność bazy.

Założenie trzecie zrobione w rozdz. 2, że spadek napięcia na oporności bazy jest do pominięcia w stosunku do spadku napięcia na złączu, jest bardzo dobrze spełnione gdy dioda jest spolaryzowana w kierunku zaporowym, oraz przy napięciach w kierunku przewodzenia znacznie mniejszych od wysokości bariery potencjału w złączu φ. Przy napięciach w kierunku przewodzenia większych od φ, gdy oporność złącza staje się bardzo mała, oporność objętości germanu w obszarze bazy nie może być pominięta. Dla diody spolaryzowanej w kierunku zaporowym lub przy niskim poziomie wprowadzania nośników mniejszościowych do obszaru bazy, tzn. przy spełnieniu założenia czwartego wprowadzonego w rozdz. 2, oporność bazy dana jest przez równanie (13). Równanie to słuszne jest dla diod o grubości bazy znacznie mniejszej od średnicy złącza.

$$R_b = \frac{\varrho_b \cdot W_b}{A} \quad [\Omega], \tag{13}$$

gdzie

ϱ_b — oporność właściwa germanu w obszarze bazy, dla zerowego prądu diody [Ω cm],

W_b — efektywna grubość bazy [cm],

A — powierzchnia złącza [cm²].

Przy dużych prądach w kierunku przewodzenia, gdy koncentracja wprowadzanych dziur staje się porównywalna z koncentracją donorów w obszarze bazy, zmniejszanie oporności właściwej germanu w obszarze bazy powoduje zmniejszanie tej oporności. Związek między wartością

oporności bazy R_b dla małego poziomu wprowadzania daną przez równanie (13) i efektywną opornością określoną jako stosunek napięcia do prądu diody, przy dużym poziomie wprowadzania dany jest przez równanie [17]

$$R_b = \frac{1+b}{2b} \frac{U_p}{I_p} \cdot \left(1 + \frac{qU_p}{2kT}\right) \quad [\Omega], \tag{14}$$

gdzie

U_p — napięcie przewodzenia przyłożone do diody [V],
I_p — prąd płynący przez diodę [A],
b — stosunek ruchliwości nośników mniejszościowych do większościowych,
q — ładunek elektronu [C],
k — stała Boltzmana [Ws/°K],
T — temperatura w skali bezwzględnej.

Dla germanu typu n w temperaturze 300°K równanie (14) przyjmuje postać

$$R_b = 0{,}75 \frac{U_p}{I_p} (1 + 20\,U_p) \quad [\Omega]. \tag{15}$$

Jeśli przy projektowaniu diody mamy narzuconą wartość prądu w kierunku przewodzenia I_p przy napięciu U_p, obliczamy z równania (15) wartość oporności R_b, a następnie z równania (13) obliczamy niezbędną powierzchnię złącza.

4. CZAS PRZEŁĄCZANIA DIODY Z KIERUNKU PRZEWODZENIA NA KIERUNEK ZAPOROWY

Jeśli napięcie przyłożone do diody zostanie gwałtownie przełączone z kierunku przewodzenia na kierunek zaporowy, prąd wsteczny osiągnie wartość wynikającą z charakterystyki statycznej dla przyłożonego napięcia, dopiero po upływie pewnego okresu czasu [8,2]. W stanie nieustalonym amplituda prądu wstecznego może być porównywalna z wartością prądu przewodzenia płynącego przed zmianą kierunku napięcia. Zarówno amplituda prądu w stanie nieustalonym jak i czas ustalania się wartości prądu są zależne od parametrów fizycznych i konstrukcyjnych diody jak i właściwości obwodu. Przez właściwości obwodu rozumiemy wartość prądu przewodzenia przed zmianą kierunku napięcia, wartość napięcia wstecznego do której dioda zostaje przełączona, oraz sumę oporności źródła i obciążenia.

Stany nieustalone występujące po zmianie kierunku napięcia na diodzie wywołane są dwoma zjawiskami.

Pierwsze zjawisko polega na wprowadzeniu nadmiarowych (w stosunku do koncentracji w warunkach równowagi termicznej) nośników

mniejszościowych do obszaru bazy, przy przepływie prądu w kierunku przewodzenia. Usuwanie tych nośników z obszaru bazy i powrót do koncentracji równowagowej po zmianie kierunku napięcia, jest przyczyną powstawania impulsu prądu wstecznego.

Drugim zjawiskiem jest rozładowanie pojemności złącza *p-n*. Dla większości diod przemysłowych, decydujący wpływ na stany nieustalone przy przełączeniu z kierunku przewodzenia na kierunek zaporowy, wywiera zjawisko pierwsze.

W diodach z bardzo cienką bazą, w których ładunek gromadzony w bazie podczas przepływu prądu w kierunku przewodzenia doprowadzony jest do minimum, istotny wpływ na czas przełączania może wywierać również rozładowanie pojemności złącza *p-n*. Stała rozładowania określona jest przez pojemność złącza oraz całkowitą oporność obwodu.

Jak już powiedziano, amplituda i czas ustalania się prądu wstecznego po przełączeniu diody są zależne zarówno od parametrów diody jak i parametrów układu. Można powiedzieć ogólnie, że będą one tym mniejsze, im mniejszy będzie ładunek zgromadzony w bazie podczas przepływu prądu w kierunku przewodzenia. Współczynnikiem, który zależy tylko od parametrów fizycznych i konstrukcyjnych diody i może być miarą właściwości konstrukcji diody z punktu widzenia szybkości przełączania, jest stosunek prądu przewodzenia diody do ładunku zgromadzonego w bazie przy przepływie tego prądu.

Przy uwzględnieniu szybkości rekombinacji na kontakcie omowym wartość tego stosunku dana jest przez równanie [13]:

$$\frac{I_p}{Q_b} = \frac{1}{\tau_p} \, \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{W_b}{L_p}\right) + \frac{sL_p}{D_p}\operatorname{ch}\left(\frac{W_b}{L_p}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{W_b}{L_p}\right) + \frac{sL_p}{D_p}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{W_b}{L_p}\right) - 1\right]} \quad [\mathrm{s}^{-1}], \tag{16}$$

gdzie

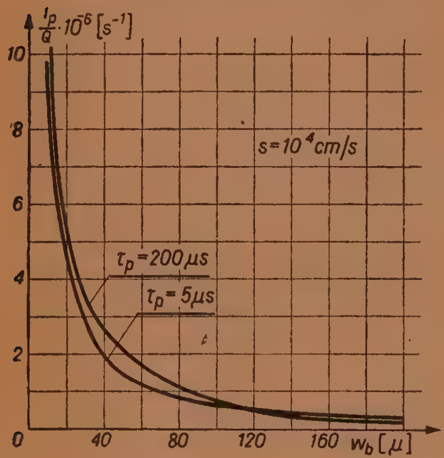
I_p — ustalona wartość prądu w kierunku przewodzenia [A],
Q_b — ładunek nośników nadmiarowych zgromadzonych w bazie [C]
τ_p — czas życia nośników mniejszościowych w bazie [s],
s — szybkość rekombinacji na kontakcie omowym [cm/s],
W_b — grubość bazy [cm].

Na rys. 9 wykreślono wartość tego stosunku obliczoną z równania (16), dla szybkości rekombinacji na kontakcie omowym $s = 10^4$ cm/s i dwóch wartości czasu życia nośników mniejszościowych w obszarze bazy, w funkcji grubości bazy. Na rys. 10 wykreślono ten stosunek dla innej wartości szybkości rekombinacji i tych samych wartości czasu życia.

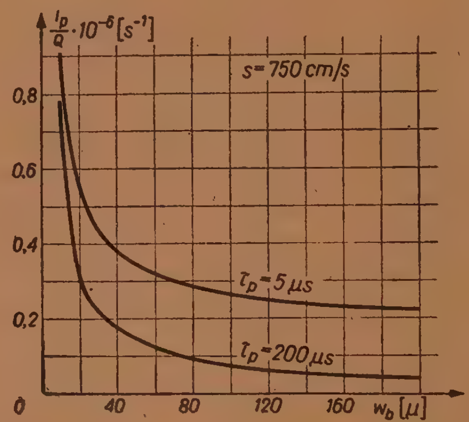
Jak widzimy z wykresów, szybkość rekombinacji na kontakcie omowym wywiera bardzo duży wpływ na wartość stosunku I_p/Q_b, przy czym

wzrasta ona ze wzrostem szybkości rekombinacji. Jednocześnie przy większych wartościach szybkości rekombinacji na kontakcie stosunek I_p/Q_b jest silniej zależny od grubości bazy.

Zależność stosunku I_p/Q_b od czasu życia nośników mniejszościowych



Rys. 9. Zależność stosunku prądu w kierunku przewodzenia I_p do ładunku Q_b zgromadzonego w bazie przy przepływie tego prądu, od grubości bazy W_b, dla dwóch wartości czasu życia dziur w obszarze bazy τ_p, przy dużej szybkości rekombinacji na kontakcie omowym s.



Rys. 10. Zależność stosunku prądu w kierunku przewodzenia I_p, do ładunku Q_b zgromadzonego w bazie przy przepływie tego prądu od grubości bazy W_b, dla dwóch wartości czasu życia dziur w obszarze bazy τ_p przy małej szybkości rekombinacji na kontakcie omowym s.

w obszarze bazy, przy spełnieniu warunku, że droga dyfuzji jest większa od grubości bazy, jest dla obydwu wartości szybkości rekombinacji stosunkowo niewielka.

5. SZYBKOŚĆ PRZEŁĄCZANIA DIODY Z KIERUNKU ZAPOROWEGO NA KIERUNEK PRZEWODZENIA

Gdy napięcie przyłożone do diody zostanie gwałtownie przełączone z kierunku zaporowego na kierunek przewodzenia, rozkład koncentracji nadmiarowych nośników mniejszościowych w obszarze bazy, związany z ustaloną wartością prądu przewodzenia, zostaje osiągnięty dopiero po upływie pewnego okresu czasu [6; 13]. Czas gromadzenia tych nośników, tzn. czas ustalania się wartości prądu przewodzenia, jest zależny od parametrów diody oraz od wartości prądu przewodzenia, do której dioda jest przełączona.

Przy przełączaniu do dużych wartości prądu oporność bazy R_b jest znacznie większa od oporności złącza i ona decyduje o wartości prądu przewodzenia. W momencie przełączania napięcia wartość oporności bazy

określona jest przez równanie (13) i ona wyznacza wartość prądu przewodzenia w tym momencie.

Wprowadzone do obszaru bazy nośniki mniejszościowe obniżają następnie oporność bazy, zgodnie z tym, co było powiedziane w rodziale 3. Ustalona wartość prądu przewodzenia związana jest z początkową wartością oporności bazy przez równanie (14), a efektywna oporność bazy w stanie ustalonym określona jest przez stosunek spadku napięcia do prądu diody.

Czas ustalania się wartości prądu określony jest przez wielkość ładunku, jaki musi być zgromadzony w bazie dla uzyskania danej wartości prądu przewodzenia. W tym przypadku miarą właściwości konstrukcji diody będzie również stosunek wartości prądu przewodzenia do ładunku zgromadzonego w bazie przy jego przepływie, dany przez równanie (16). Odwrotnością tego stosunku jest czas ustalania wartości prądu. Dla jego zmniejszenia należy dążyć do uzyskania jak największej szybkości rekombinacji na kontakcie omowym oraz jak najmniejszej grubości bazy.

Jak widać z wykresów przedstawionych na rys. 9, możliwe do uzyskania czasy ustalania się wartości prądu są rzędu 10^{-7} sekundy. Jeśli przełączanie następuje do małej wartości prądu przewodzenia, tak że oporność złącza jest duża w porównaniu z opornością bazy, bezwładność diody będzie określona przez złącze. Czas ustalania wartości prądu będzie wyznaczony przez stałą *RC*, która jest iloczynem oporności i pojemności złącza *p-n*. Możliwe do uzyskania wartości stałej *RC* dla złącz są rzędu 10^{-8} sekundy.

Należy podkreślić, że zniekształcenie impulsów prądu, związane ze zmianami oporności bazy po przełączeniu napięcia na diodzie, występują wyraźnie tylko wtedy, jeżeli suma oporności źródła i obciążenia jest mniejsza od oporności diody. Jeśli oporność obciążenia jest znacznie większa od oporności diody, ona określa wartość prądu w obwodzie, tak że małe zmiany oporności diody wywołują nieznaczne zmiany prądu w obwodzie [3].

6. ZAKOŃCZENIE

Przedstawione w tym artykule wzory i wykresy pozwalają na obliczenie parametrów elektrycznych diody przy zadanych wymiarach i parametrach fizycznych złącza lub na zaprojektowanie diody o żądanych parametrach. Ograniczono się tutaj do parametrów charakterystyki statycznej oraz parametrów określających szybkość przełączania diody w obydwu kierunkach.

Należy podkreślić, że wzory te nie uwzględniają szybkości rekombinacji na powierzchni germanu wokół złącza *p-n*, co będzie przyczyną

różnic między wartościami obliczanymi i uzyskanymi w praktyce. Wzrost rekombinacji na swobodnej powierzchni germanu będzie pogarszał większość parametrów, jak np. napięcie przebicia czy prąd wsteczny diody, jednak będzie równocześnie zmniejszał czas przełączania diody z kierunku przewodzenia na kierunek zaporowy.

Jakkolwiek przytoczone wzory dają graniczne wartości parametrów, jakie można uzyskać przy sprowadzeniu szybkości rekombinacji powierzchniowej do zera, pozwalają one na optymalne dobranie wartości parametrów fizycznych i konstrukcyjnych diody, dla uzyskania kompromisowych wartości parametrów elektrycznych. Jest to bardzo ważne ze względu na przeciwny i często bardzo silny wpływ poszczególnych parametrów fizycznych i konstrukcyjnych diody na różne parametry elektryczne. Dla przykładu można powiedzieć, że dla uzyskania jak najmniejszej oporności w kierunku przewodzenia oraz jak najkrótszych czasów przełączenia diody w obydwu kierunkach, wymagana jest jak najmniejsza grubość bazy oraz jak największa szybkość rekombinacji na kontakcie omowym. Jednocześnie wywołuje to obniżenie napięcia przebicia oraz wzrost prądu wstecznego.

Zakład Elektroniki IPPT

WYKAZ LITERATURY

1. Ambroziak A.: *Germanowe diody ostrzowe o małej oporności przewodzenia.* Prz. Telekom. Nr 6, 1958, s. 177.
2. Ambroziak A., Kobus A.: *Zjawiska przejściowe związane z gromadzeniem nośników mniejszościowych w diodzie o złotym ostrzu.* Prz. Elektroniki Nr 1, 1960, s. 50.
3. Ambroziak A.: *Germanowe diody z ostrzem złotym.* Prz. Elektroniki Nr 3, 1960.
4. Ankrum P. D.: *Design limitations of semiconductors components.* Proceedings of the 1958 Electronic Components (Reliable Application of Component parts) 35—41.
5. Baranow Ł. I.; Biekbułatow M. S.: *K waprosu o pikie obratnowo toka w diodach s p-n pieriechodom.* Radiotiechnika i Elektronika, tom IV, Nr 4, 1959, s. 703—709.
6. Barnes F. S.: *The torward switching transient in semiconductor diodes at large currents,* Proc. IRE, vol. 46, ss. 1427—1428, July, 1958.
7. Hunter L. P.: *Handbook of semiconductor electronics,* Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1956.
8. Kingston R. H.: *Switching time in junction diodes and junction transistors,* Proc. IRE, vol. 42, ss. 829—834, 1954.
9. Lax B., Naeustadter S. F.: *Transient response of p-n junction,* J. Appl. Phys. vol. 25, pp. 1148—1154, September, 1954.
10. Miller S. L.: Phys. Rev. vol. 99, Nr 4, s. 1234, 1955.

11. P i e n i n N. A.: *Wlijanije skorosti rekombinacji u niewypriamliajuszczego elektroda na czastotnyje swojstwa p-n pieriechoda dla słuczaja małych pieriemiennych napriażenij.* Radiotiechnika i Elektronika, Nr 8, 1957, s. 1053—1061.
12. P i e n i n N. A., C z e r k a s K. W.: *Wlijanije rekombinacji u niewypriamliajuszczego elektroda na swojstwa spławnych germanijewych diodow*, Radiotiechnika i Elektronika, tom III, Nr 12, 1958, s. 1495—1500.
13. R e d i k e r R. H., S a w y e r D. E.: *Very narrow blase diode.* Proc. IRE, vol. 45, s. 944—953, July, 1957.
14. S h o c k l e y W.: *The theory of p-n junction in semiconductors and p-n junction transistors*, Bell Syst. Techn. Journ. vol. 28, s. 435—489, July, 1949.
15. S h o c k l e y W.: *Electrons and holes in semiconductors.* D. Van Mostrand Company, Inc, New York, 1951. (Tłum. na jęz. pol. PWN, Warszawa, 1956).
16. S t e e l e E. L.: *Charge storage in junction diodes*, J. Appl. Phys. vol. 25, s. 916—918, July 1954.
17. S w a n s o n I. A.: *Diode theory in the light of hole injection*, J. Appl. Phys. vol. 25, s. 314—323, march, 1954.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЕРМАНИЕВЫХ ДИОДОВ С ТОНКОЙ БАЗОЙ

Теория р-*n*-перехода данная Шоклейем принимала предпосылку, что области *p* и *n* полупроводника, составляющие переход, бесконечно велики. Таким образом она не учитывает влияния невыпрямляющих контактов образуемых металлическими электродами с полупроводником, на параметры *p-n* перехода. В последующих теоретических и экспериментальных работах доказано, что для получения быстродействующих диодов с высокой предельной частотой, полезно уменьшение толщины области *p-n* перехода до величины значительно меньшей чем диффузионная длина неосновных носителей в этих элементах. Для таких диодов нельзя пользоваться результатами теории *p-n* перехода разработанной Шоклейем. В этом случае очень заметное влияние на параметры *p-n* перехода имеют свойства невыпрямляющих контактов. Свойства невыпрямляющего контакта определены скоростью поверхностной рекомбинации на контакте.

В последние годы написано несколько теоретических работ, учитывающих влияние невыпрямляющих контактов на параметры *p-n* перехода. В настоящей статье на основании этих работ выведены зависимости, связывающие непосредственно физические и конструктивные параметры диодов с электрическими. Приведенные зависимости актуальны для *p-n* переходов исполненных методом сплавления на германии *n* — типа. Эти зависимости вычислены для определенного диапазона параметров диодов и представлены в форме графика. Благодаря этому они легко используемы при проектировании диодов, предназначаемых для работы в импульсных схемах. Рассмотрены параметры определяющие пригодность диода к работе в быстродействующих схемах. Этими параметрами являются все параметры статической вольтамперной характеристики, т. е. напряжение пробоя, ток насыщения, сопротивление растекания и величина потенциального барьера.

Параметрами определяющими максимальную быстроту действия диода при внезапном переключении диода с проводящего на непроводящее направление является время запирания, а с непроводящего на проводящее — время оптирания.

DESIGNING OF GERMANIUM DIODES WITH THIN BASE

Shockley's theory of p-n junction includes the assumption that p and n regions of the semiconductor combined in p-n junction are of infinite length. Consequently it neglects the influence of the nonrectifying contacts between the metal electrodes and semiconductor on the parameters of p-n junction. The theoretical and experimental investigations carried out to that respect have proved that in order to get the fast switching diodes it is worth while to reduce the thickness of p and n regions of junction much below the diffusion length of minority carriers in these regions.

The conclusions deriving from Shockley's theory of p-n junction are of no use to these diodes, since the properties of nonrectifying contacts in such an instance a very marked effect on the parameters of p-n junction.

The properties of the nonrectifying contact are defined by the surface recombination velocity within the contact.

Lately quite a number of publications take account of influence exerted by the properties of nonrectifying contacts on the parameters of p-n junction. On the ground of these publications the author suggests the dependencies linking directly physical and structural parameters of diodes with electrical ones, which are correct for the junctions formed by alloy method on the base of n-type germanium. The graphs representing these dependencies evaluated for a certain range of the parameters of diodes are easy applicable in designing of diodes camarked for the operation within impulse circuits. The amount of introduced parameters is limited to those which define the suitableness of the diode to operate in switching circuits at the strong signals, namely all the parameters associated with the voltage-current characteristic, such as breakdown voltage, saturation current spreading resistance and barrier potential.

The greatest velocity of diode operation is defined by the parameters of time which correspond to the period of stabilization of the static values of the parameters at the sudden switching of diode from forward to reverse directions (reverse recovery time) and from reverse to forward directions (forward recovery time).

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI
TOM X ZESZYT 1 1961

621.3.072.2:537.525:537.523.3

J. LESIŃSKI

Mechanizm wyładowania w stabilizatorach koronowych

Rękopis dostarczono 25. 3. 1960.

Omówiono mechanizm wyładowania w stabilizatorach koronowych. Rozpatrzono możliwe rodzaje wyładowań elektrycznych w gazie przy cylindrycznym układzie elektrod. Szczegółowo opisano mechanizm samoistnego wyładowania ulotowego oraz rozpatrzono możliwe przyczyny powstawania niestabilnego samoistnego wyładowania ulotowego.

1. WSTĘP

Stabilizatorem koronowym nazywamy lampę gazowaną pracującą w zakresie wyładowania ulotowego służącą do stabilizacji napięcia [1].

Do stabilizacji napięcia oprócz specjalnych układów z lampami termoelektronowymi stosowana jest powszechnie lampa gazowana, pracująca w zakresie wyładowania jarzeniowego, zwana jarzeniową lampą stabilizującą lub potocznie jarzeniówką. W porównaniu ze stabilizatorami koronowymi jarzeniowe lampy stabilizujące cechuje stosunkowo duży prąd minimalny, który musi płynąć przez lampę oraz niskie napięcie stabilizacji. Układy stabilizujące z lampami termoelektronowymi wymagają minimum dwóch lamp; mają więc znaczne rozmiary i pobierają dodatkową moc ze źródła zasilania. Wobec tego układy te stosuje się tylko wtedy, gdy wymagana jest specjalnie dobra stabilizacja, płynna regulacja napięcia lub gdy prąd pobierany z zasilacza stabilizowanego ma znaczną wartość.

Stabilizatory koronowe natomiast posiadają napięcia stabilizacji od setek woltów do dziesiątek tysięcy woltów. Maksymalny prąd typowego stabilizatora koronowego wynosi ok. 0,3 mA przy napięciach stabilizacji w zakresie 400—2000 V. Minimalny prąd wynosi tylko ok. 5—20 mikroamperów. Jeżeli stabilizator pracuje w typowym układzie stabilizacji, to współczynnik stabilizacji wynosi ok. 0,01 przy zmianie napięcia wejściowego o 10%. Ważną zaletą stabilizatorów koronowych jest to, że posiadają małe rozmiary. Gabaryty typowego stabilizatora koronowego są

---

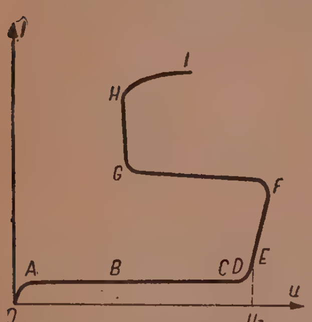
[1] Wyładowanie ulotowe nazywane jest również wyładowaniem koronowym. Nazwę stabilizator koronowy można uważać za powszechnie przyjętą.

takie jak lampy subminiaturowej (rurka o średnicy ok. 9 mm i długości 35 mm). Wobec tego stabilizatory koronowe nadają się do stabilizowania napięć zasilających liczniki Geigera i Müllera, liczniki proporcjonalne, fotopowielacze itp. Zastosowanie stabilizatora koronowego pozwala na zmniejszenie ciężaru i wymiarów oraz na uproszczenie układów zasilaczy wysokiego napięcia stosowanych w technice jądrowej. Dotyczy to głównie monitorów przenośnych z jonizacyjnymi i scyntylacyjnymi detektorami promieniowania.

Niniejsza praca omawia szczegółowo mechanizm wyładowania elektrycznego w gazie, które zachodzi w stabilizatorze koronowym. Pozwoli to na pełne zrozumienie własności stabilizatorów koronowych, co będzie tematem innej pracy.

2. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA WYŁADOWANIA ELEKTRYCZNEGO W GAZIE PRZY CYLINDRYCZNYM UKŁADZIE ELEKTROD

Wyładowanie ulotowe [12] powstaje w obszarze międzyelektrodowym wypełnionym gazem wtedy, gdy natężenie pola elektrycznego w tym obszarze jest niejednorodne z powodu małego promienia krzywizny jednej lub obu elektrod. Najlepiej pracują stabilizatory koronowe o cylindrycznym układzie elektrod, przy czym środkową elektrodą jest anoda. Wobec tego w artykule tym zostaną opisane możliwe rodzaje wyładowania w gazie zawartym pomiędzy współosiowymi cylindrycznymi elektrodami.



Rys. 1. Charakterystyka prądowo-napięciowa wyładowania elektrycznego w gazie pomiędzy współosiowymi cylindrycznymi elektrodami.

Na rysunku 1 przedstawiono zależność prądu płynącego przez obszar wyładowania od napięcia doprowadzonego do elektrod. W celu lepszego zobrazowania tej zależności skala na osi rzędnych (prąd) jest logarytmiczna, a na osi odciętych (napięcie) liniowa. Jeżeli napięcie pomiędzy elektrodami wzrasta od zera, wzrasta również prąd *OA* do pewnego nasycenia, tzn. że wszystkie elektrony powstające na skutek emisji z katody i w gazie zostają zbierane na anodzie. Wobec tego wartość prądu nasycenia *B* w obszarze *AC* jest stała i zależy jedynie od zewnętrznego czynnika jonizującego (przy danym rodzaju, ciśnieniu gazu i układzie elektrod). W zakresie tym pracują komory jonizacyjne. Ze wzrostem napięcia elektrony zyskują coraz to większą energię pomiędzy kolejnymi zderzeniami z cząsteczkami gazu na drodze do dodatniej elektrody. Jeśli energia ta wystarczy do zjonizowania cząsteczek gazu, nastąpi tzw. wzmocnienie gazowe *C* i prąd znowu wzrasta

CD. Wzmocnienie gazowe zależy od warunków rekombinacji i zobojętnienia elektronów i charakteryzuje się współczynnikiem

$$A = \frac{n}{n_0} = \exp \int_{r_a}^{r_0} \alpha \, dr, \qquad (1)$$

gdzie

n_0 — liczba pierwotnych elektronów (tzn. tych, które powstały w wyniku działania zewnętrznego czynnika jonizującego),
n — całkowita liczba elektronów zebranych na anodzie,
r_a — promień anody,
r_0 — promień obszaru w którym zachodzi wzmocnienie gazowe,
α — pierwszy współczynnik Towsenda, czyli liczba elektronów swobodnych i równa jej ilość jonów dodatnich wytworzona drogą zderzeń przez jeden elektron przy przejściu przezeń drogi 1 cm w kierunku od katody do anody.

Współczynnik α dla danego gazu zależy od natężenia pola elektrycznego K i ciśnienia gazu P, czyli

$$\alpha/p = f(k/p) \qquad (2)$$

oczywiście jeżeli $r > r_0$, to $\alpha = 0$. W zakresie prądu nasycenia $A < 2$.

Jak wynika z równania (1) ilość elektronów zebrana na anodzie jest proporcjonalna do ilości elektronów pierwotnych. W zakresie tym pracują liczniki proporcjonalne.

Przy dalszym wzroście napięcia powstają dodatkowe elektrony wskutek działania tzw. procesów wtórnych (patrz rozdz. 3) w wyniku czego zostaje zachwiana proporcjonalność ilości elektronów zbieranych na anodzie do ilości elektronów pierwotnych. Zakres ten nazywany jest zakresem ograniczonej proporcjonalności.

W pewnym punkcie *E* wyładowanie staje się niestabilne. Po przekroczeniu tego punktu wyładowanie przechodzi w samoistne i wartość prądu nie zależy już od zewnętrznego czynnika jonizującego, ponieważ dodatkowe elektrony potrzebne do podtrzymania wyładowania są wytwarzane w obszarze wyładowania. Ażeby wyładowanie samodzielne mogło istnieć, każdy elektron wychodzący z katody i dochodzący do anody musi w wyniku wszystkich procesów zachodzących w obszarze wyładowania zapewnić wyjście z katody jednego nowego elektronu. Napięcie, przy którym wyładowanie staje się samoistne, nazywamy napięciem początkowym ulotu. Jeżeli w szereg ze źródłem napięcia i rurką wyładowczą zostanie włączony opór o odpowiednio dużej wartości, to przy wzroście prądu napięcie na pewnym odcinku *EF* pozostanie prawie stałe. W zakresie tym przy anodzie widoczne jest charakterystyczne świecenie gazu. Jest to zakres wyładowania ulotowego, w którym pracują stabilizatory koro-

nowe. Przy dalszym wzroście prądu spada gwałtownie napięcie FG i przy dostatecznie małym oporze szeregowym ustala się tzw. normalne wyładowanie jarzeniowe z charakterystycznym świeceniem gazu przy katodzie G. Ze wzrostem prądu wzrasta obszar świecenia gazu przy katodzie. W tym zakresie GH przy wzroście prądu napięcie znowu pozostaje prawie stałe. W zakresie tym pracują jarzeniowe lampy stabilizujące. Gdy świecenie gazu rozprzestrzeni się na całą powierzchnię katody, wówczas ze wzrostem prądu rośnie napięcie HI. Wyładowanie w tym zakresie nazywa się nienormalnym wyładowaniem jarzeniowym. Przy dalszym wzroście prądu następuje ostateczne przebicie przez wyładowanie iskrowe lub łukowe.

3. MECHANIZM WYŁADOWANIA ULOTOWEGO

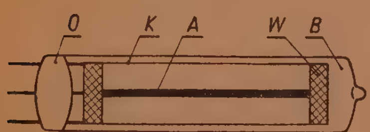
Na rysunku 2 pokazano układ elektrod stabilizatora koronowego. Rozkład natężenia pola elektrycznego w stabilizatorze można obliczyć ze wzoru

$$K_r = \frac{U}{r \ln \frac{r_k}{r_a}}, \tag{3}$$

gdzie

K_r — natężenie pola elektrycznego w punkcie odległym o r od anody,
U — napięcie pomiędzy elektrodami,
r_a — promień anody,
r_k — promień katody.

Jak wynika ze wzoru (3), przy dostatecznie dużej krzywiźnie anody w stosunku do katody natężenie pola elektrycznego przy anodzie jest znacznie większe niż przy katodzie. Wobec tego, tylko w pewnej warstwie przy anodzie, zwanej warstwą ulotową, będzie zachodziła jonizacja przez zderzenia pierwszego rodzaju oraz powstawanie lawin, jak również świecenie gazu powstające w wyniku powrotu cząsteczek gazu ze stanów wzbudzonych do normalnych. W pozostałym obszarze wyładowania nie zachodzi jonizacja zderzeniowa. Obszar ten nazywany jest strefą zewnętrzną wyładowania ulotowego. W obszarze tym występuje jednoskładnikowy ładunek przestrzenny w postaci chmury jonów dodatnich ograniczający przechodzenie cząstek naładowanych. Z tego powodu prąd płynący przez stabilizator jest określony głównie przez opór strefy zewnętrznej. Opór ten, przy danej geometrii elektrod, zależy od rodzaju



Rys. 2. Układ elektrod stabilizatora koronowego. A — anoda, K — katoda, W — ceramiczne izolatory centrujące elektrody, B — bańka szklana, O — wyprowadzenie elektrod.

gazu i napięcia pomiędzy elektrodami. W miarę wzrostu prądu płynącego przez obszar wyładowania rozszerza się warstwa ulotowa w kierunku katody i jednocześnie w strefie zewnętrznej wzrasta natężenie pola elektrycznego, które równoważy napięcie pomiędzy elektrodami. Z tego powodu napięcie pomiędzy elektrodami pozostaje prawie stałe, dopóki warstwa ulotowa nie dosięgnie katody. Wówczas wskutek braku obszaru ograniczającego przepływ ładunków elektrycznych prąd gwałtownie wzrasta, spada napięcie pomiędzy elektrodami i zaczyna się zakres wyładowania jarzeniowego.

Warunkiem istnienia samoistnego wyładowania ulotowego jest powstawanie elektronów na granicy warstwy ulotowej w wyniku tzw. procesów wtórnych. Elektrony te powodują podtrzymanie lawiny. Należy wziąć pod uwagę następujące procesy wtórne:

1. jonizacja gazu fotonami powstałymi w wyładowaniu. Zależy ona od rodzaju i ciśnienia gazu oraz od energii fotonów. Głównym parametrem jest współczynnik pochłaniania fotonów w gazie μ,
2. emisja elektronów z katody pod wpływem padania na nią fotonów powstających w wyładowaniu. Charakteryzuje ją współczynnik emisji fotoelektrycznej katody γ_f,
3. emisja elektronów z katody podczas zobojętniania się przy katodzie jonów dodatnich. Charakteryzuje ją współczynnik γ_j;
4. jonizacja gazu przez zderzenia z atomami metastabilnymi;
5. emisja elektronów z katody przy zderzeniach atomów metastabilnych z katodą.

Ponieważ dwóch ostatnich procesów wtórnych praktycznie nie można rozróżnić, więc charakteryzuje się je wspólnym współczynnikiem γ_m.

Wpływ atomów metastabilnych dotychczas nie jest jeszcze całkowicie znany. Atomy metastabilne oddziaływając na katodę powodują wzrost emisji elektronów i trudno odróżnić emisję elektronów pod wpływem atomów metastabilnych od emisji pod wpływem jonów, co można ogólnie wyrazić zależnością

$$\gamma_m = \gamma_j (1 - k_1), \tag{4}$$

gdzie

k_1 — współczynnik udziału atomów metastabilnych w emisji elektronów z katody.

Podobnie trudno odróżnić jonizację gazu spowodowaną atomami metastabilnymi od jonizacji na skutek działania innych procesów wtórnych. Gdy w obszarze wyładowania znajduje się w dostatecznej ilości dodatkowy gaz, którego energia jonizacji jest niższa niż energia stanu metastabilnego podstawowego gazu, co oznacza, że dodatkowy gaz może być jonizowany przez atomy metastabilne gazu podstawowego, wówczas po-

wstające dodatkowe elektrony powodują wzrost lawiny. Równoznaczne jest to ze wzrostem pierwszego współczynnika Towsenda do wartości

$$\alpha' = \alpha(1+k_2), \tag{5}$$

gdzie

k_2 — współczynnik udziału atomów metastabilnych w jonizacji gazu.

Współczynniki γ_f, γ_j, i γ_m zależą od rodzaju materiału, z którego wykonana jest katoda, i od rodzaju gazu wypełniającego stabilizator. Wartość tych współczynników nie zmienia się w szerokich granicach dla zazwyczaj stosowanych katod i gazów w stabilizatorach [2]. Natomiast współczynnik μ ma wartości różniące się o kilka rzędów w zależności od rodzaju gazu. Wobec tego współczynnik ten może wpływać na rodzaj wyładowania.

Jeżeli $\mu < 1$ cm^{-1}, to przy typowych rozmiarach stabilizatora nie ma praktycznie absorpcji fotonów w gazie. W tym przypadku źródłem dodatkowych elektronów jest emisja z katody spowodowana fotonami lub jonami. Wobec tego, aby mogło powstać samoistne wyładowanie musi być spełniony jeden z następujących warunków

a) dla czynnika jonów

$$\gamma_j \cdot A > 1, \tag{6}$$

b) dla czynnika fotonów

$$\eta/\alpha \cdot Q \cdot g \cdot \exp \cdot \int_{r_a}^{r_0} (\alpha - \mu)\, dr > 1, \tag{7}$$

gdzie:

η/α — liczba fotonów na elektron w lawinie,

Q — prawdopodobieństwo emisji fotoelektronowej z katody,

g — liczba wyrażająca część fotonów, które pomimo strat geometrycznych i absorpcji dochodzą do katody.

W przypadku średniego pochłaniania fotonów w gazie — współczynnik μ rzędu 10^{-1} cm — główną rolę w wyładowaniu odgrywa fotojonizacja gazu. Przy typowych rozmiarach stabilizatora bardzo mało fotonów dociera do katody, ponieważ prawie wszystkie zostają pochłaniane w gazie. Fotony te mogą być źródłem powstawania nowych lawin jeżeli spełniony jest warunek

$$\beta \cdot f \cdot \exp \cdot \int_{r_a}^{r_0} \alpha\, dr > 1 \tag{8}$$

gdzie:

β — prawdopodobieństwo że foton spowoduje powstanie elektronu na zewnątrz obszaru lawiny.

---

[2] Słuszne przy samoistnym wyładowaniu ulotowym i dostatecznie dużym prądzie wyładowania (patrz rozdz. 5).

f — liczba fotonów, które mogą spowodować jonizację gazu przypadających na jeden elektron w lawinie.

Wobec tego fotony są w tym przypadku czynnikiem rozprzestrzeniającym wyładowanie wzdłuż całej długości elektrod. Powstające w wyładowaniu jony dodatnie w postaci chmury otaczają anodę i powodują obniżenie natężenia pola elektrycznego przy anodzie, w wyniku czego zmniejsza się ilość fotonów w obszarze wyładowania i wartość człona

$$f \exp \cdot \int_{r_a}^{r_c} a dr \tag{9}$$

maleje, co powoduje niespełnienie nierówności (8). Następuje tzw. gaszenie wyładowania przez ładunek przestrzenny. Wyładowanie może być podtrzymane przez jony dodatnie zobojętniające się na katodzie, o ile jest spełniony warunek (6) lub przez zewnętrzny czynnik jonizujący. Ten rodzaj wyładowania nazywany jest w języku niemieckim Durchbruchsstosskorona, a w języku angielskim burstpulse-corona [3].

Jeżeli $\mu > 100^{-1}$ cm, to na skutek bardzo silnego pochłaniania fotonów w gazie nowe lawiny mogą powstawać jedynie bardzo blisko pierwotnej lawiny, wskutek czego wyładowanie nie może rozprzestrzenić się wzdłuż całej długości elektrod. Obszar wyładowania ma kształt nici kończących się na anodzie. Ten rodzaj wyładowania nazywa się wyładowaniem snopiastym.

W tablicy zestawiono wyniki szeregu prac nad określeniem głów-

Główny czynnik podtrzymujący wyładowanie ulotowe przy cylindrycznym układzie elektrod

L.p.	Rodzaj gazu	Ciśnienie Tr	Główny czynnik decydujący o wyładowaniu	Literatura
1	Wodór	25—600	γ_f	[8]
2	Argon	150—1000	γ_f	[2,9]
3	Argon	25—400	γ_j, γ_f	[2,8]
4	Azot	25—600	γ_j	[5]
5	Azot + Tlen (20% O_2)	25—600	μ (wył. koronowe relaksacyjne)	[5]
6	Tlen	25—600	μ (wył. snopiaste)	[5]

[3] Autor proponuje nazwać to wyładowanie wyładowaniem koronowym relaksacyjnym.

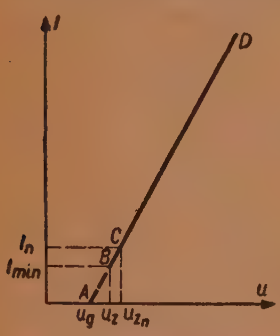
nego czynnika powodującego powstawanie elektronów podtrzymujących wyładowanie. Jak wynika z tej tablicy, jeżeli gaz ma stosunkowo duży współczynnik pochłaniania fotonów μ, to zamiast normalnego wyładowania ulotowego powstaje wyładowanie snopiaste.

Bouling [1] badał wyładowanie ulotowe w tlenie. Stwierdził on, że w małym zakresie ciśnienia wynoszącym około 0,5—6 Tr może powstać normalne wyładowanie ulotowe.

Wobec powyższego stabilizatory koronowe są napełniane gazami o małym współczynniku pochłaniania fotonów.

4. CHARAKTERYSTYKA PRĄDOWO-NAPIĘCIOWA WYŁADOWANIA ULOTOWEGO

Na rysunku 3 pokazano charakterystykę prądowo-napięciową stabilizatora koronowego. Odpowiada ona części wykresu *EF* z rys. 1. Charakterystyka ta zdjęta jest bez dodatkowego oporu zewnętrznego. Jak widać z wykresu, aby mogło powstać samoistne wyładowanie ulotowe, przez obszar wyładowania musi płynąć pewien minimalny prąd I_{min}. Wówczas napięcie pomiędzy elektrodami odpowiada napięciu początkowemu ulotu U_z. Jeżeli napięcie doprowadzone do stabilizatora jest mniejsze niż napięcie U_z, to w stabilizatorze powstają krótkotrwałe wyładowania, zwane niestabilnym wyładowaniem ulotowym. Czas trwania wyładowania niestabilnego zależy dla danego stabilizatora, głównie od napięcia i staje się równy zero przy napięciu U_g. Częstość powtarzania się wyładowania niestabilnego wzrasta z natężeniem zewnętrznego czynnika jonizującego. Przy napięciach mniejszych niż napięcie U_g (rys. 3), zwane napięciem progowym zakresu Geigera i Müllera, nie powstaje już niestabilne wyładowanie ulotowe. Jak wiadomo, w zakresie niestabilnego wyładowania ulotowego pracują powszechnie stosowane liczniki Geigera i Müllera (część kropkowana prostej na rys. 3).



Rys. 3. Charakterystyka prądowo - napięciowa stabilizatora koronowego. *AB* — niestabilne wyładowanie ulotowe, *BD* — samoistne wyładowanie ulotowe, *BC* — niestabilne samoistne wyładowanie ulotowe.

Wielu autorów obliczało charakterystykę prądowo-napięciową wyładowania ulotowego robiąc różne założenia i uproszczenia lub też starając się uwzględnić możliwie wszystkie czynniki mogące wpłynąć na zgodność równania z rzeczywistą charakterystyką.

Towsend [16] wyprowadził przybliżony wzór na charakterystykę wyładowania ulotowego

$$u(u-u_z)=\frac{i\cdot p\cdot r_k^2}{2K}\log\left(\frac{r_k}{r_a}\right), \tag{10}$$

gdzie

i — prąd na jednostkę długości elektrod stabilizatora.

Werner [18] w swojej obszernej pracy na temat wyładowania w cylindrycznym układzie elektrod wyprowadził równanie na napięcie początkowe wyładowania ulotowego, które ma postać

$$u_z = u \log\left[\left(r_k - \frac{dk}{p}\right)\frac{1}{r_a} - 1\right] \tag{11}$$

gdzie:

p — ciśnienie gazu,

k — droga swobodna elektronu przy ciśnieniu jednostkowym,

U — najniższe napięcie anody przy którym elektron może podczas swej ostatniej drogi swobodnej d dotrzeć do anody,

d — droga swobodna elektronu docierającego do anody.

W literaturze istnieje szereg wzorów, wyprowadzonych przez Deutscha [4], Kapcowa [6], Mayra [11], Prinza [14], Sirotińskiego [15] dla różnych założeń wyładowania.

Jednak wszystkie wyprowadzone wzory w większym lub mniejszym stopniu odbiegają od rzeczywistych charakterystyk, szczególnie w zakresie większych prądów płynących przez obszar wyładowania [3], [7]. Popkow [13] podaje współczynniki korygujące równanie Deutscha [4] tak, aby spełniało ono się również przy większych prądach wyładowania.

Różniczkując równanie charakterystyki prądowo-napięciowej można otrzymać wzór na oporność obszaru wyładowania ulotowego na jednostkę długości elektrod. Według Loeba [9] oporność wyładowania na jednostkę długości elektrod można wyrazić wzorem

$$R_l = \frac{p r_k^2}{2U_{j+} \cdot U} \log\left(\frac{r_k}{r_a}\right) \tag{12}$$

przy założeniu że $r_a > r_k$

gdzie

U_{j+} — ruchliwość jonów dodatnich przy ciśnieniu jednostkowym.

5. NIESTABILNE SAMOISTNE WYŁADOWANIE ULOTOWE

Przy prądach nie dużo większych od minimalnego prądu samoistnego wyładowania ulotowego istnieje zakres impulsowego wyładowania, zwany niestabilnym samoistnym wyładowaniem ulotowym (rys. 3 część charakterystyki BC). Amplituda impulsu tego rodzaju wyładowania najczęściej przekracza dopuszczalny poziom szumów.

Częstotliwość impulsów rośnie z prądem do pewnego maksimum, przy którym spada amplituda impulsów o około dwa rzędy i przy prądzie I_n zaczyna się normalne wyładowanie ulotowe. Prądowi I_n odpowiada napięcie początkowe normalnego wyładowania ulotowego U_{zn}. Częstotli-

wość impulsów jest rzędu 10^3 imp/sek. Rośnie ona z oświetleniem stabilizatora, przy czym wystarcza oświetlenie światłem widzialnym. W początkowym zakresie niestabilnego samoistnego wyładowania ładunek na impuls rośnie z prądem.

Niestabilny samoistny zakres wyładowania ulotowego cechuje brak świecenia obszaru wyładowania przy anodzie. Natomiast występuje świecenie przy katodzie, które nie jest równomierne, lecz ma miejsce jedynie w pewnych obszarach katody. Ten rodzaj świecenia nie zależy od pojemności równolegle podłączonej do stabilizatora.

Dotychczas nie zbadano dokładnie przyczyny występowania niestabilnego wyładowania ulotowego. Można przypuszczać, że ten rodzaj wyładowania występuje z dwóch powodów:

1. zmiany wartości współczynnika γ w czasie,
2. ładowania się wewnętrznych ścianek bańki stabilizatora.

Jeśli chodzi o zmienność w czasie współczynnika γ, czyli o niestabilne procesy zachodzące na katodzie, to podczas wyładowania na skutek bombardowania katody jonami dodatnimi zachodzi stałe oczyszczanie katody z warstwy tlenków, gazów i par. Z tego powodu współczynnik γ, w początkowym zakresie wyładowania samoistnego, może zmienić się o rząd wielkości lub więcej. Jak wynika z równania (6), zmienność współczynnika powoduje zmiany napięcia początkowego samoistnego wyładowania, co prowadzić może do impulsowego wyładowania.

Gromadzenie się ładunku na ściankach stabilizatora może powodować uwalnianie zaadsorbowanych na ściankach zanieczyszczeń i wprowadzać zmienne w czasie zniekształcenia pola elektrycznego w obszarze wyładowania. Uwolnione ze ścianek zanieczyszczenia mogą być przyczyną zmiany współczynnika γ, a niestałość pola elektrycznego powoduje zmiany współczynnika α, wchodzące do równania (6).

Według Webera [17] metalizacja od wewnątrz szklanej bańki stabilizatora ograniczająca ładowanie się ścianek powoduje zmniejszenie zakresu niestabilnego samoistnego wyładowania. Drugi sposób polega na stosowaniu gazu o małej ruchliwości jonów. Niestabilne samoistne wyładowanie występujące przy napełnieniu stabilizatora wodorem jest o wiele mniej intensywne niż przy napełnieniu kryptonem, a w przypadku ksenonu jest bardzo małe, lub wcale nie występuje. Można to wytłumaczyć w następujący sposób. Ponieważ ruchliwość jonów jest odwrotnie proporcjonalna do m_j — masy jonu, więc przy napełnieniu stabilizatora ciężkimi gazami szlachetnymi energia jonów bombardujących katodę nie wystarcza do oczyszczania jej z warstwy tlenków, par lub gazów. Ze względu na duży ciężar nośniki ładunku nie rozchodzą się poza obszar wyładowania, a więc nie powodują uwalniania zaadsorbowanych zanieczyszczeń ze szklanych ścianek stabilizatora, lub w przypadku gdy do-

chodzą do ścianek stabilizatora, energia ich jest za mała, by mogły spowodować uwalnianie zanieczyszczeń.

W ostatnich latach ukazało się wiele prac, których tematem było wyładowanie ulotowe. Można stwierdzić, że obecnie znana jest ogólna teoria mechanizmu wyładowania ulotowego (co było tematem niniejszego artykułu). Obecnie ogłaszane prace dotyczą na ogół szczegółów mechanizmu wyładowania. Badane są wyładowania przy określonej geometrii elektrod, w danym gazie i ograniczonym zakresie ciśnień. Dużo uwagi poświęca się wpływowi stanu powierzchni katody na napięcie początkowe ulotu, prąd maksymalny i stałość tych parametrów w czasie. Wyniki tych prac zostaną omówione w artykule na temat własności stabilizatorów koronowych.

Składam podziękowanie Doc. B. Paszkowskiemu za przedyskutowanie materiału zawartego w artykule.

Zakład Elektroniki Ogólnej IBJ, Warszawa

WYKAZ LITERATURY

1. Bouling H. F.: Phil. Mag., T. 18, 1943, s. 909.
2. Colli L., Facchini U. F.: Phys. Rev., T. 88, 1952, s. 987.
3. Collinson A. J. L., Hill D. W.: J. Sci. Instr. T. 32, 13, 1955.
4. Deutsch W.: Ann. Phys., T. 16, 1933, s. 588.
5. Huber K.: Phys. Rev., T. 97, 1955, s. 267.
6. Kopcow N. A.: *Elektriczeeskije jawlenija w gazie i wakuumie*, Moskwa, Leningrad.
7. Kip A. F., Brown: Phys. Rev., T. 57, 1940, s. 1069.
8. Lauer A.: Jour. appl. Phys., T 23, 1952, s. 300.
9. Loeb L. B.: *Basic processes of gaseous electronics*, Los Angeles, 1955.
10. Loeb L. B.: *Fundamental processes of electrical discharges in Gases*, New York, 1939.
11. Mayr O.: Arch. El. T. 18, 1927, s. 270.
12. Medicus G.: Zeit. Tech. Phys., T. 14, 1933, s. 304.
13. Popkow W. J.: Elektriczestwo, T. 1, 1949, s. 33.
14. Prinz H.: Arch. E., T. 31, 1937, s. 756, T. 32, 1938, s. 114.
15. Sirotiński B.: Hochspannungstechnik, T. 1, cz. 1 Berlin 1955.
16. Howsend J. S.: Phil. Mag., T. 28, 1914, s. 83.
17. Weber H.: Technische Hochschule, Dresden 1958.
18. Werner S.: Z. f. Phys., T. 90, 1934, s. 384.

МЕХАНИЗМ РАЗРЯДА В КОРОННЫХ СТАБИЛИЗАТОРАХ НАПРЯЖЕНИЙ

В статье дается описание механизма разряда, происходящего в коронных стабилизаторах напряжения. Рассмотрены возможные виды электрических разрядов в газе, в случае коаксиальных циллиндрических электродов. Подробно описан механизм самостоятельного коронного разряда, а также рассмотрены возможные причины возникновения нестабильного самостоятельного коронного разряда.

DISCHARGE MECHANISM IN CORONA VOLTAGE REGULATING TUBES

Discharge mechanism in corona voltage regulating tubes is discussed. The possible electric discharges in gas by cylindrical geometric of electrodes are regarded. The mechanism of selfsustained corona discharge is in detail described and possible causes of initiation of unstable selfsustained corona discharge are regarded.

538.221:621.318.12

B. ZÍTKA, K. ZAVĚTA, H. LACHOWICZ

Przyczynek do badań nad wyjaśnieniem mechanizmu przemagnesowania w ferrytach

Rękopis dostarczono 18. 3. 1960

Przedstawiono analizę wyników pomiarów statycznych i dynamicznych przeprowadzonych dla manganowo-magnezowego rdzenia ferrytowego. Badano zmiany indukcji zachodzące podczas przemagnesowywania materiału w przypadku obydwu metod pomiarowych oraz czas przełączania określony w impulsowych warunkach pomiaru. Przeprowadzono porównanie wyników dotyczących zmian indukcji zachodzących w przypadku obydwu metod. Przedstawiono próbę interpretacji fizycznej dla pewnej części uzyskanych rezultatów doświadczalnych.

1. WSTĘP

Prowadzenie badań nad dynamiką procesów magnesowania możliwe jest przez poddanie materiału działaniu pola magnetycznego o postaci szybko narastających impulsów. W tym przypadku informacje dotyczące mechanizmu przemagnesowania uzyskać można na podstawie analizy przebiegu czasowego indukowanego w uzwojeniu pomiarowym napięcia, którego kształt silnie zależy nie tylko od natężenia przyłożonego pola, lecz również od stanu magnetycznego materiału, przy którym zachodzi przemagnesowanie. Wpływ obydwu tych wielkości analizować można przy pomocy niesymetrycznego impulsowego magnesowania próbki. W metodzie tej, przy pomocy impulsów pola jednej polaryzacji i o stałej amplitudzie, ustala się początkowy stan magnetyczny próbki (będzie to zawsze pewien określony stan remanencji), natomiast poprzez zmianę amplitudy impulsów polaryzacji przeciwnej zmienia się w określony sposób wartość natężenia pola. Zmiany magnetyzacji, a raczej odpowiadające im zmiany indukcji w materiale, określa się poprzez analizę przebiegu indukowanego napięcia.

Przedmiot niniejszej pracy stanowią właśnie niesymetryczne impulsowe pomiary przeprowadzone dla ferrytu manganowo-magnezowego, charakteryzującego się stosunkowo krótkimi czasami relaksacji, jak rów-

nież analiza uzyskanych tą drogą wyników. Pomiary impulsowe uzupełnione zostały pomiarami statycznymi pętli histerezy materiału wykonanymi przy takich warunkach, że możliwa była następnie ocena wpływu różnicy dynamiki tych obydwu pomiarów na proces przemagnesowania. Za statyczne przyjęto uważać zmiany magnetyzacji zachodzące przy pomiarach wykonanych metodą balistyczną w odróżnieniu od zmian dynamicznych zachodzących przy pomiarach impulsowych. Założenie to jest usprawiedliwione wobec wartości stałej czasu obwodu magnesującego w układzie balistycznym, równej 0,2 sek, która to wartość jest o około sześć rzędów większa niż w przypadku aparatury impulsowej. Okres drgań własnych galwanometru wynosił 12 sek.

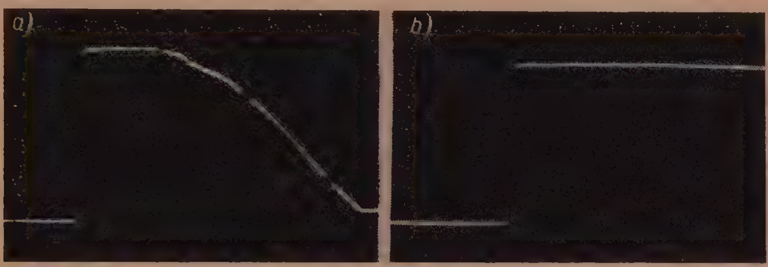
2. METODA POMIARU

Pomiary przeprowadzone zostały na rdzeniu toroidalnym o średniej średnicy równej 2,335 cm oraz przekroju wynoszącym 0,226 cm², wykonanym z ferrytu typu $Mn_{0,556}Mg_{0,608}Fe_{1,845}O_4$. W pierwszej fazie prac wykonano pomiary balistyczne rodziny pętli histerezy metodą komutacyjną. W tym celu na próbce nawinięto system trzech uzwojeń. Uzwojenie pierwotne o 250 zwojach służyło dla komutacji pola H_I. Uzwojenie pomocnicze o 200 zwojach wytwarzało dodatkowe pole H_{II}, które dobierane było, każdorazowo przy pomiarze danej pętli, w taki sposób, że suma jego z polem komutowanym dawała w jednym kierunku osi H zawsze tę samą wartość pola maksymalnego $H_{\max}, H_I+H_{II}$, natomiast w drugim założoną dla danej pętli wartość pola wynikającą ze stopnia niesymetrii tej pętli. Ze względu na niesymetrię mierzonej krzywej, konieczne było wyznaczenie zarówno punktów w opadającej, jak i wznoszącej się części pętli. Każdy z pomiarów dla danej pętli odnoszony był zawsze do tego samego punktu wyjściowego. Dlatego też zawsze przy zmianie warunków początkowych akomodowano materiał poprzez wielokrotną komutację polem. Pozostałe 700-zwojowe uzwojenie mierzonej próbki stanowiło uzwojenie wtórne, które podłączone było bezpośrednio do galwanometru balistycznego.

Położenie pomierzonych pętli w kierunku osi indukcji określone zostało na podstawie wartości remanencji. Wartość tą określono podczas szybkiego rozmagnesowania znajdującej się w stanie remanencji próbki polem wzbudzonym tłumionymi prądowymi oscylacjami. Przy odpowiednim doborze częstotliwości i dekrementu tłumienia tych oscylacji możliwe było bezpośrednie określenie wartości indukcji remanencji wprost z wielkości wychylenia galwanometru. Posługując się tą metodą stwierdzono, że punkt odpowiadający maksymalnej indukcji $B(H_{\max})$ w przypadku pętli symetrycznej, jest również punktem wspólnym dla wszystkich pętli

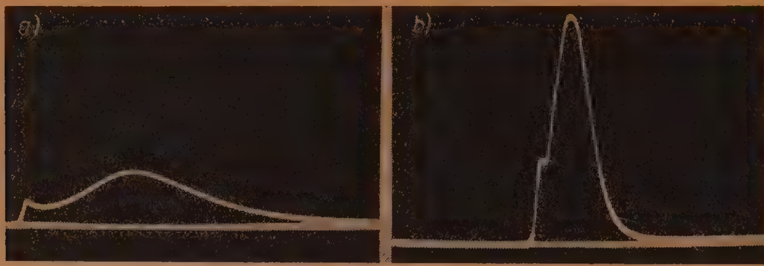
niesymetrycznych. Położenie tego punktu dla pętli symetrycznej ustalono bezpośrednio z pomiaru wartości maksymalnej indukcji przy komutacji maksymalnym polem w obydwu kierunkach osi *H*. W przypadku pętli niesymetrycznych ustalenie położenia punktu szczytowego przy zastosowaniu tej metody było niemożliwe.

Przy pomiarach impulsowych stosowano aparaturę, której dokładny opis zamieszczono w pracy [1]. Podstawową część tej aparatury stanowią dwa tyratronowe generatory dające prądowe impulsy o amplitudzie regulowanej w sposób ciągły w granicach 5—25 A i o czasie narastania 0,05—0,3 μsek odpowiednio dla maksymalnej i minimalnej amplitudy. Czas opadania impulsów wynosił około 25 μsek przy długości, dla której opadanie wierzchołka nie przekraczało 2%, równej 10 μsek. Oscylogram generowanego impulsu przedstawiono na rysunku 1a. Rysunek 1b przed-



Rys. 1. Kształt impulsu prądowego o amplitudzie 20 A
a) całkowity przebieg, b) narastająca część impulsu.

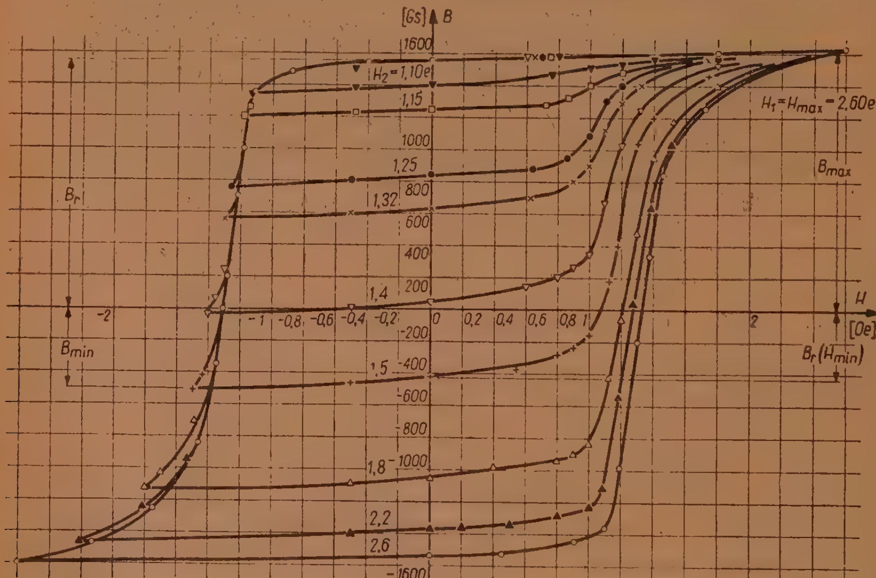
stawia płaską część impulsu o długości 10 μsek. Każdy z generatorów pracował z częstotliwością powtarzania równą 250 Hz. Obwody wyjściowe, jak również układy wyzwalające obydwu generatorów zaprojektowane zostały w taki sposób, że w uzwojeniu magnesującym badanego rdzenia działały impulsy o przemiennej polaryzacji, dając w efekcie dwukierunkowe magnesowanie próbki. Uzwojenie magnesujące, w celu zapewnienia jednorodności pola magnesującego, wykonane zostało w postaci koncentrycznego uchwytu wewnątrz którego umieszczany był badany rdzeń toroidalny z jednozwojowym uzwojeniem wtórnym. Kształt i amplituda impulsów prądu kontrolowana była poprzez fotografowanie przebiegu na ekranie synchroskopu, każdorazowo w przypadku ustawienia innej żądanej wartości natężenia pola. Interesujące wielkości w przebiegu indukowanego napięcia, zdejmowanego również fotograficznie (co przykładowo przedstawiono na rys. 2a i b), określone były z uwzględnieniem nieliniowości pionowego wzmacniacza i podstawy czasu synchroskopu oraz zniekształceń występujących w lampie oscyloskopowej. Dokładna kalibracja współrzędnych napięcia i czasu umożliwiła wyznaczenie bezwzględnych wartości mierzonych, jak również i następnie obliczanych wielkości.



Rys. 2. Oscylogramy typowych przebiegów indukowanego napięcia dla przypadku serii pierwszej uzyskane przy wartościach natężenia pola: a) $H_1=2{,}6$ Oe, $H_2=1{,}80$ Oe b) $H_1=H_2=2{,}6$ Oe.

3. WYNIKI POMIARÓW

Na rysunku 3 przedstawiono pętle histerezy badanego materiału wyznaczone metodą balistyczną. Jak uprzednio już wspomniano, wszystkie te krzywe mają wspólny punkt określony współrzędnymi $H=2{,}6$ Oe



Rys. 3. Rodzina niesymetrycznych pętli histerezy pomierzona metodą balistyczną.

i $B=1630$ Gs. Z przedstawionych pętli wynika, że w przypadku cyklu niesymetrycznego zmiana indukcji $\Delta B=B_{max}-B_{min}$ (po akomodacji materiału) jest mniejsza niż dla cyklu symetrycznego przy odpowiednio tej samej zmianie pola. W następstwie tego zjawiska krańcowe punkty pętli niesymetrycznych w zakresie pól ujemnych (o współrzędnych B_{min}, H_{min}) leżą poza płaszczyzną objętą pętlą symetryczną. Wznosząca się część krzy-

wych, leżąca w zakresie pól dodatnich, dla przypadku wszystkich niesymetrycznych cykli zawiera się wewnątrz krzywej dla przebiegu symetrycznego. Kształt pętli w tej części odbiega tym więcej od kształtu krzywej symetrycznej im bardziej zmniejszony zostaje zakres pola przy którym zdejmowana jest dana pętla. Z uzyskanych przebiegów pętli histerezy materiału określić można dwie interesujące wielkości, które następnie można będzie porównać z analogicznymi parametrami w przypadku dynamicznych warunków pomiaru. Będą to statyczne zmiany indukcji określone jako:

$$\Delta B_s = -B_{min}(H_{min}) + B_r$$

bądź

$$\Delta B_s = B_{max} - B_r(H_{min})$$

odpowiednio dla opadającej i wznoszącej się części pętli oraz początkowa z punktu widzenia pola impulsowego statyczna przenikalność różniczkowa określona nachyleniem stycznej w punktach remanencji. (Występujące w powyższych zależnościach wielkości przedstawione są na przykładzie jednej z pętli na rys. 3).

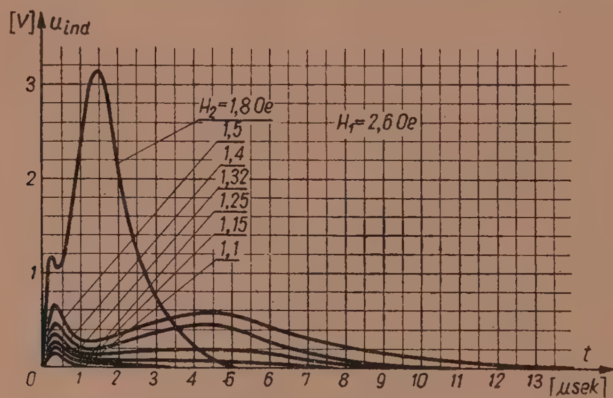
Za pomocą aparatury impulsowej przeprowadzono dwie serie pomiarów. W serii pierwszej, w której badano wpływ zmian wartości pola przemagnesowującego, początkowym stanem dla impulsów magnesujących był stan remanencji określony poprzedzający impuls pracy, impulsem pola o przeciwnej polaryzacji. Amplitudę tego ostatniego dobrano w taki sposób, aby wartość natężenia pola równa była maksymalnemu polu jakie występowało przy pomiarze balistycznym w przypadku pętli symetrycznej. Amplitudę impulsów magnesujących, dla każdego pomiaru w serii, ustalano odpowiednio równą analogicznym wartościom występującym w przypadku każdej z pomierzonych balistycznie niesymetrycznych pętli histerezy. W drugiej serii pomiarów badano wpływ zmian początkowego stanu magnetycznego. Dla każdego pomiaru w serii, przy pomocy impulsów przeciwnej polaryzacji niż impuls pracy zmieniano początkowy stan remanencji w taki sposób, że odpowiadał on kolejno analogicznym stanom w przypadku niesymetrycznych pętli balistycznych. Magnesujący impuls pola dla tej serii pomiarów, pozostawał stały i amplituda jego odpowiadała maksymalnemu polu występującemu przy pomiarach balistycznych. Dla obydwu serii pomiarów przeprowadzono integrację przebiegów indukowanego napięcia uzyskując w efekcie przebiegi odpowiadające zmianom indukcji w materiale przy dynamicznych warunkach przemagnesowania. Dokonanie tej operacji pozwoliło poza tym na określenie całkowitej zmiany indukcji ΔB_p występującej podczas przemagnesowania, jak również na wyznaczenie czasu przełączania zdefiniowanego jako dwukrotna wartość czasu dla którego indukcja osiąga połowę swej maksymalnej wartości. Przeprowadzona kalibracja układu współrzędnych

w napięciu i czasie, o czym wspominano już uprzednio, umożliwiła określenie bezwzględnych wartości badanych parametrów. I tak, znając przekrój badanej próbki określić można wartość indukcji, wyznaczonej na drodze numerycznej integracji, na podstawie zależności:

$$B_p(t) = \frac{1}{q} 10^8 \int u \cdot dt$$

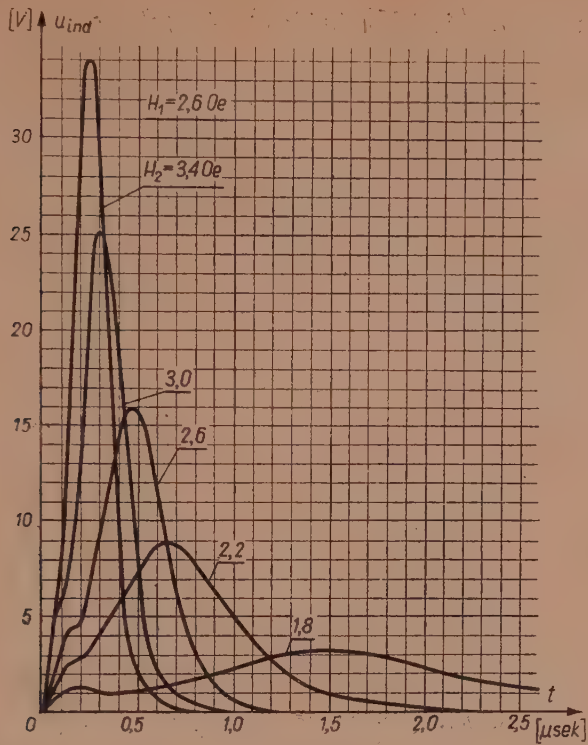
Podstawiając wartości q[cm²], u[V], t[sek] wynik otrzyma się w [Gs].

Na rysunku 4a i b przedstawiono czasowe przebiegi indukowanego



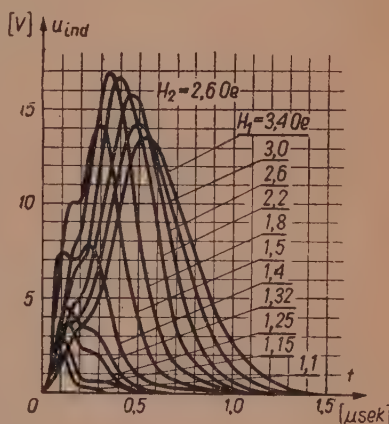
Rys. 4a. Przebiegi indukowanego napięcia uzyskane dla *I* serii pomiarów.

napięcia uzyskane w pierwszej serii pomiarów. Rysunek 5 przedstawia analogiczne krzywe dla serii drugiej. W obydwu przypadkach zakres pomiarów impulsowych rozszerzony został o dwie wartości w kierunku wyższych pól w stosunku do pomiarów balistycznych. Różnice w kształcie i charakterze zmian krzywych uzyskanych dla obydwu serii są bezpośrednio widoczne z przedstawionych przebiegów. Dla serii pierwszej czyli przy stałym początkowym stanie magnetycznym próbki, obserwuje się szybkie malenie wartości głównego maksimum wraz z maleniem pola magnesującego. Czas trwania przebiegu, odpowiadający z dużym przybliżeniem czasowi przełączania, jest również zależny od wartości przyłożonego pola. Zależność ta, jak wynika z analizy krzywych indukowanego napięcia, wykazuje maksimum występujące przy pewnej wartości pola magnesującego. Przebiegi uzyskane dla pierwszej serii mają zasadniczo analogiczny charakter jak w przypadku badanych zwykle cykli symetrycznych. W drugiej serii pomiarów, charakteryzującej się zmiennym początkowym stanem magnetycznym materiału próbki, oraz stałą wartością pola magnesującego, kształt przebiegu indukowanego napięcia nie zmienia się w tak zdecydowany sposób ze zmianą stanu początkowego,



Rys. 4b. Przebiegi indukowanego napięcia uzyskane dla *I* serii pomiarów.

jak występowało to w przypadku serii pierwszej przy zmianie natężenia pola magnesującego. Obserwuje się natomiast występowanie ekstremum wartości głównego maksimum oraz monotoniczny wzrost czasu przełączania wraz ze wzrostem natężenia pola impulsu poprzedzającego, czemu odpowiada przesuwanie się stanu początkowego wzdłuż osi zerowego pola w kierunku stanu maksymalnej remanencji. W dalszych rozważaniach przedstawione zostaną niektóre konkretne zależności oraz pokazane będą związki występujące pomiędzy wynikami uzyskanymi dla statycznych i dynamicznych warunków pomiaru.



Rys. 5. Przebiegi indukowanego napięcia dla II serii pomiarów.

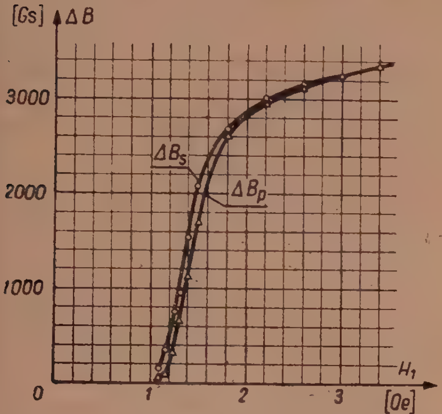
4. ANALIZA UZYSKANYCH WYNIKÓW

Przebiegi indukowanego napięcia, w przypadku pomiarów dynamicznych, a tym samym i analiza związanych z nimi parametrów będzie poprawna jeżeli tylko całkowita zmiana indukcji jaka zachodzi pod wpływem przyłożonego pola dokona się wcześniej aniżeli nastąpi dostrzegalny spadek amplitudy impulsu magnesującego. Warunek ten nie jest spełniony w przypadku pomiarów pierwszej serii przy wartościach pola 1,25 do 1,5 Oe co łatwo można stwierdzić obserwując odpowiednie przebiegi indukowanego napięcia na rys. 4a. Wobec jednak szybkiego malenia do zera przebiegu napięcia jeszcze w zakresie płaskiego odcinka impulsu pola, co ma miejsce dla tych przypadków, można uważać, że wynikający stąd błąd nie będzie miał istotnego wpływu na wyniki pomiarów, a przede wszystkim na ocenę zmiany indukcji określonej powierzchnią objętą krzywą indukowanego napięcia.

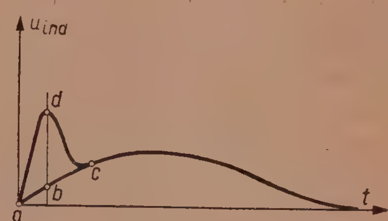
Na podstawie przebiegów uzyskanych w pierwszej serii pomiarów obliczono całkowite zmiany indukcji ΔB_p. Wielkość tę w funkcji natężenia pola magnesującego przedstawia rysunek 6, na który naniesiono dla porównania również zależność $\Delta B_s = f(H_1)$ wyznaczoną z balistycznych pętli histerezy. Obydwie krzywe w zakresie większych pól praktycznie pokrywają się, natomiast przy małych natężeniach pola dynamiczna zmiana indukcji ΔB_p jest wyraźnie mniejsza niż odpowiadająca jej zmiana ΔB_s. W zakresie najsłabszych pól przebieg napięcia indukowanego przyjmuje wartość zerową znacznie wcześniej niż maleć zaczyna impuls pola magnesującego, zatem w tym przypadku rozbieżności pomiędzy wartościami ΔB_p i ΔB_s nie może być wynikiem omawianego uprzednio błędu. Należy wobec tego sądzić, że różnice te rzeczywiście występują szczególnie, że przeprowadzenie analogicznej analizy dla drugiej serii pomiarów dałoby podobne rezultaty. Na tej podstawie wnioskować można, że niesymetryczne pętle histerezy, w impulsowych warunkach pomiaru rdzenia ferrytowego, są bardziej prostokątne, a jednocześnie szersze niż w przypadku pętli pomierzonych metodą balistyczną.

Na podstawie obserwacji krzywych indukowanego napięcia sądzić można, że proces przemagnesowania zachodzi drogą różnych mechanizmów. Wskazuje na to wyraźna obecność dwóch, wzajemnie przesuniętych w czasie maksimów. Analiza kształtu przebiegu indukowanego napięcia, jak również położenie w czasie jego wartości ekstremalnych, pozwala przypuszczać, że procesem decydującym o zmianach magnetyzacji w początkowym okresie działania pola (zakres pierwszego maksimum) jest szybki proces odwracalny. Dominującym natomiast procesem odpowiadającym podstawowej części przebiegu, w której występuje główne maksimum, i opóźnionej w stosunku do momentu przyłożenia pola magnesującego będzie jak można sądzić znacznie powolniejszy proces nieodwra-

calnych zmian magnetyzacji. Traktując krzywą indukowanego napięcia jako wypadkową dwóch przebiegów odpowiadających dwom różnym mechanizmom magnesowania przeprowadzić można ich wyodrębnienie co pozwoli na ocenę udziału każdego z tych mechanizmów w procesie przemagnesowania. Wyodrębnienie obydwu przebiegów możliwe jest jednak tylko z pewnym przybliżeniem. Na rysunku 7 przedstawiono schematycznie sposób rozdzielenia tych obydwu przebiegów, a właściwie odpowiadających im powierzchni. Obszar zamknięty krzywą *abcda* określa zmiany indukcji wywołane działaniem szybkiego procesu odwracalnego.



Rys. 6. Przebiegi całkowitych zmian indukcji w zależności od pola magnesującego, uzyskane na drodze pomiarów statycznych (ΔB_s) i dynamicznych ΔB_p) przy stałym początkowym stanie magnetycznym materiału próbki (seria *I*).

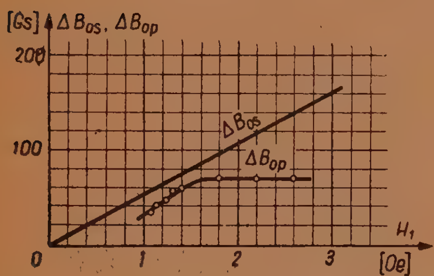


Rys. 7. Ilustracja metody wyznaczania odwracalnych zmian indukcji.

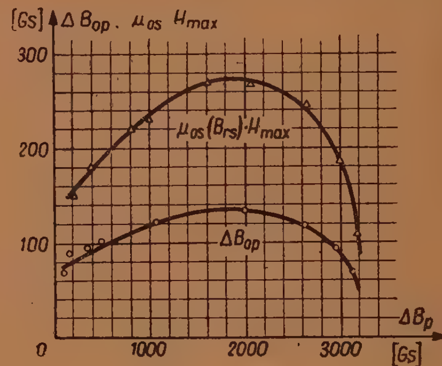
Niedokładność wyznaczenia tej powierzchni wynika z nieznajomości położenia punktu *c*, przez co interpolacja przebiegu podstawowego, odpowiadającego nieodwracalnym zmianom, pomiędzy punktami *a* i *c* może nie być właściwe. Przeprowadzone, pomimo tych niedokładności, obliczenia dały jednak w efekcie pewną zależność pomiędzy tak określonymi odwracalnymi zmianami indukcji a analogicznymi wielkościami wyznaczonymi z przebiegów pętli histerezy. Obliczenia te wykonano dla wszystkich przebiegów indukowanego napięcia w przypadku pierwszej serii pomiarów. Uzyskana tą drogą zależność odwracalnych zmian indukcji ΔB_{op} od wartości natężenia pola magnesującego przedstawia rysunek 8. Różniczkowa przenikalność magnetyczna μ_{op} odpowiadająca dynamicznym odwracalnym zmianom strumienia określona jest początkowym stanem magnetycznym materiału przy którym następuje przemagnesowanie. Wobec tego korzystając z pomierzonych uprzednio pętli histerezy, wyznaczyć można odpowiadające otrzymanym dynamicznym zmianom odwracalnym, statyczne zmiany indukcji równe:

$$\Delta B_{os} = \mu_{os} \cdot H$$

gdzie μ_{os} jest przenikalnością odpowiadającą stanowi maksymalnej remanencji $B_{r\,max}$ określoną nachyleniem stycznej w punkcie o współrzędnych $(0, B_{r\,max})$. Przebieg odwracalnych zmian dynamicznych ΔB_{op}, leżący pod prostą reprezentującą zmiany statyczne wykazuje nasycenie występujące przy wartości pola równej w przybliżeniu sile koercji materiału określonej dla symetrycznej pętli histerezy. W analogiczny sposób rozpatrzyć można zmiany indukcji ΔB_{op} w przypadku drugiej serii pomiarów przy stałym polu magnesującym, przy czym zależność ta badana byłaby w funkcji początkowego stanu magnetycznego próbki. Dla tego przypadku trudno jest jednak z dostateczną dokładnością określić war-



Rys. 8. Przebiegi odwracalnych zmian indukcji, uzyskane z pomiarów dynamicznych (ΔB_{op}) i statycznych (ΔB_{os}) w zależności od pola magnesującego dla przypadku I serii pomiarów.



Rys. 9. Przebiegi odwracalnych statycznych i dynamicznych zmian indukcji dla przypadku serii *II*.

tość indukcji odpowiadającej wyjściowej remanencji, dlatego też za zmienną niezależną przyjęto całkowitą zmianę indukcji ΔB_p. Wobec tego, że przyjęta zmienna związana jest z indukcją remanencji zależności: $\Delta B_p = B_{p\,max} - B_{rp}$, to przebieg funkcji $\Delta B_{op}(\Delta B_p)$ będzie tylko przesunięty o stałą wartość B_{rp} w kierunku osi odciętych w stosunku do przebiegu jaki zasadniczo należałoby rozpatrywać.

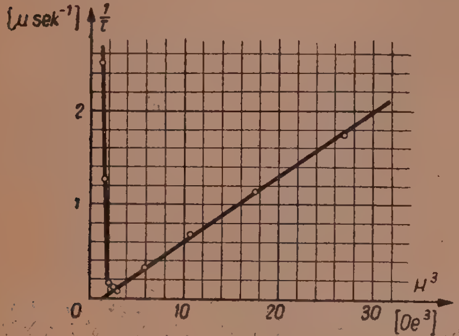
Zależność $\Delta B_{op}(\Delta B_p)$, obliczono na podstawie krzywych indukowanego napięcia, dla drugiej serii pomiarów przedstawia rysunek 9. Z przebiegu tej zależności wynika, że zmiany indukcji wywołane procesem odwracalnym są przy tych warunkach największe dla wartości ΔB_p równej około połowy wartości maksymalnej, zatem przy zerowej remanencji. Rozpatrywanemu przebiegowi odpowiada, w przypadku statycznych warunków pomiaru, zależność $\mu_{os}(B_{rs}) \cdot H_{max} = f(\Delta B_s)$ w której wielkość μ_{so} reprezentuje różniczkową przenikalność określoną dla każdej z pętli przez nachylenie stycznej w punkcie odpowiadającym zmiennemu ko-

lejno stanowi remanencji próbki. Wielkość ΔB_s, jak już definiowano uprzednio reprezentuje statyczne zmiany indukcji odpowiadające analogicznym zmianom występującym w warunkach drugiej serii pomiarów dynamicznych. Stosunek rzędnych dla odpowiadających sobie punktów obydwu wykreślonych na rysunku 9 przebiegów jest praktycznie stały i wynosi $\Delta B_{op}/\Delta B_{os} \doteq 0{,}5$. Wynik ten jest zgodny z wartością stosunku tych dwóch wielkości określoną z pierwszej serii pomiarów dla pola magnesującego 2,6 Oe, odpowiadającego zatem niezmiennej wartości pola stosowanej w drugiej serii.

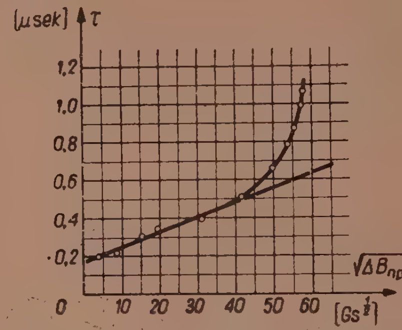
Dla obydwu serii pomiarów dynamicznych badano zależność czasu przełączania wyznaczanego na podstawie podanej poprzednio definicji, w funkcji parametrów zmiennych w danej serii. W przypadku serii pierwszej, to znaczy przy niezmiennym magnetycznym stanie początkowym, rozpatrzono zależność czasu przełączania od natężenia pola przemagnesowującego. Kształt uzyskanej w tych warunkach zależności, o czym już uprzednio wspominano, ma charakter odpowiadający przebiegom otrzymywanym zwykle dla cykli symetrycznych. Opadająca część krzywej rozpatrywanej zależności nie odpowiada jednak równoosiowej hiperboli, lecz maleje z wyższą potęgą pola. Wykreślenie tej części przebiegu we współrzędnych logarytmicznych daje prostą o współczynniku kierunkowym równym (—3), co wskazuje, że zależność $\tau = f(H)$ ma w tym zakresie postać hiperboli o równaniu $\tau = sH^{-3}$. Na rysunku 10 przedstawiono w liniowych współrzędnych, zależność $1/\tau = f(H^3)$. Uzyskaną zależność sprowadzić można do postaci: $(H_m^3 - H_0^3)\,\tau = s$, gdzie H_0 określa wartość pewnego pola progowego, natomiast s nosi nazwę współczynnika przełączania materiału. Wartości tych parametrów, określone dla badanej próbki wynoszą odpowiednio $H_0 = 1{,}12$ Oe, oraz $s = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Oe · µsek.

W przypadku drugiej serii pomiarów, a więc przy stałej amplitudzie impulsu pola magnesującego, o czasie trwania procesu przemagnesowania decydują głównie nieodwracalne zmiany indukcji ΔB_{np}. Kształt uzyskanej zależności czasu przełączania od początkowego stanu remanencji, przy tych warunkach pomiarowych, wyjaśnić można korzystając z podanego przez Menyuk'a i Goodenough'a, wyrażenia wyprowadzonego z równań dla ruchu ścian domen [2]. Wyrażenie to napisać można w postaci: $H_m - H_0)\,\tau = \text{const}\, d$. Przy magnetyzacji bliskiej nasycenia, który to zakres był zasadniczo przedmiotem badań wymienionych autorów, można uważać, że przyrost promienia cylindrycznej domeny d jest stały, a zatem zależność czasu przełączania τ od pola przemagnesowującego $(H_m - H_0$ ma charakter hiperboliczny. W naszym przypadku natężenie pola przełączającego jest stałe, zatem parametrem zmiennym musi być wielkość d. Wartość parametru d wzrasta z pierwiastkiem poprzecznego przekroju domeny, czyli z pierwiastkiem zmiany indukcji przypadającej na proces

nieodwracalny. Zatem przebieg odpowiadający zależności czasu przełączania od pierwiastka z nieodwracalnych zmian indukcji przedstawiać powinien linię prostą. Przebieg ten, uzyskany w naszym przypadku, przedstawiony jest na rysunku 11. Charakter liniowy tej zależności zacho-



Rys. 10. Zależność czasu przełączania od pola magnesującego (*I* seria).



Rys. 11. Zależność czasu przełączania od nieodwracalnych zmian indukcji uzyskana na podstawie pomiarów serii *II*.

wany jest do pewnej wartości indukcji, począwszy od której krzywa odbiega już wyraźnie od linii prostej, co uwarunkowane może być innymi, bardziej już skomplikowanymi zależnościami zachodzącymi w tym zakresie.

5. WNIOSKI

Z przeprowadzonej analizy wyników uzyskanych przy pomiarach statycznych i dynamicznych, jak również z wzajemnego ich porównania, wynikają następujące wnioski:

a) Przy ustalonym początkowym stanie magnetycznym materiału, całkowita zmiana magnetyzacji (indukcji), w przypadku magnesowania impulsowego jest mniejsza niż analogiczna zmiana zachodząca przy tej samej wartości natężenia pola podczas magnesowania w warunkach statycznych (metodą balistyczną). Różnice pomiędzy wartościami tych zmian magnetyzacji są zwłaszcza widoczne w zakresie słabych pól magnesujących.

b) Procesy odwracalne zachodzą z małym opóźnieniem za zmianami pola przemagnesowującego. Zmiana indukcji wywołana tymi procesami rośnie, w zakresie słabych pól, wraz ze wzrostem natężenia pola. W zakresie pól o większym natężeniu dalszy wzrost pola nie powoduje przyrostu zmian indukcji, a zatem występuje nasycenie. Odpowiadająca nasyceniu wartość tych zmian zależna jest jednak od początkowego stanu magnetycznego materiału i jest proporcjonalna do różniczkowej przenikalności magnetycznej wyznaczonej w punkcie odpowiadającym temu stanowi.

c) Czas przełączania zależny jest zarówno od natężenia pola magnesującego jak również od zmiany magnetyzacji zachodzącej podczas przemagnesowania i uwarunkowanej początkowym stanem magnetycznym materiału. Proces odwracalny zachodzi praktycznie w tym samym czasie dla różnych warunków pomiaru. Wpływ jego na czas przełączania decydujący jest jedynie w przypadku gdy nie zachodzi, lub zachodzi tylko w bardzo niewielkim stopniu proces nieodwracalny. Czas trwania tego ostatniego, równy praktycznie czasowi przełączania, jest odwrotnie proporcjonalny do trzeciej potęgi pola magnesującego. Przy stałej wartości tego pola a zmiennym magnetycznym stanie początkowym materiału próbki, rośnie wraz ze wzrostem magnetyzacji proporcjonalnie do pierwiastka ze zmian indukcji, przyczym zależność ta występuje tylko dla pewnego zakresu tych zmian.

6. ZAKOŃCZENIE

Praca niniejsza stanowi zasadniczo pierwszy etap badań. Zakres jej uwarunkowany był czasowym ograniczeniem współpracy autorów. W przyszłości badania te uzupełnione zostaną pomiarami na innych materiałach, jak również przez rozszerzenie zakresu badanych wielkości o dalsze parametry. Szczególna uwaga zwrócona zostanie na procesy zachodzące w okolicy siły koercji, z tego względu, że dotychczas nie zostały one wyczerpująco wyjaśnione i opisane. Badania tego rodzaju interesujące będą również z punktu widzenia zastosowań ferrytów w matematycznych maszynach cyfrowych.

Autorzy pragną podziękować Prof. dr J. Brožowi za opiekę i pomoc przy prowadzonych badaniach, jak również za szereg cennych uwag dotyczących metodyki pomiaru oraz interpretacji wyników oraz Prof. dr Sz. Szczeniowskiemu i Prof. dr inż. A. Smolińskiemu za wnikliwe przejrzenie pracy i równie cenne uwagi.

Autorzy wyrażają także swą wdzięczność Dr J. Sternberkowi za pomoc przy opracowywaniu metody pomiaru niesymetrycznych, statycznych pętli histerezy oraz mgr inż. R. Wadasowi za szereg uwag krytycznych dotyczących analizy otrzymanych wyników.

Autorzy dziękują również Pani E. Dlabolovej, oraz Panu F. Vilimowi za pomoc we właściwym przygotowaniu aparatury pomiarowej.

B. Zítka, K. Zavětá
Ústav Technické Fysiky
ČSAV — Praha
H. Lachowicz
IPPT PAN

LITERATURA

1. Menyuk N., Goodenough J. B.: J. Appl. Phys. 26, 8, 1955.
2. Zítka B. H.: Čs. čas. fys. A, 10, 230, 1960.

К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЙ МЕХАНИЗМА ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ ФЕРРИТОВ

В работе представлены результаты статических и динамических измерений ферритового сердечника состава $Mn_{0,556}$ $Mg_{0,608}$ $Fe_{1,845}O_4$. На основании статических измерений произведенных баллистическим методом получено семейство асимметрических петель гистерезиса испытываемого материала. После этого произведены динамические измерения. В этом случае сердечник подвергался воздействию магнитного поля в форме импульсов противоположного направления. Условия намагничивания подобраны таким образом, чтобы в последствии была возможность сравнения результатов полученных при применении обоих методов измерения. Произведены две серии импульсных измерений. В первой — при определенном неизменном начальном значении остаточного магнетизма испытуемого образца изменялась амплитуда намагничивающего импульса. Во второй — при постоянном намагничивающем поле изменялось начальное значение остаточного магнетизма материала образца (цена ременанта) путем изменения амплитуды импульса противоположной фазы опережающего рабочий импульс. На основании анализа полученных результатов констатировано, что петли гистерезиса в динамических условиях намагничивания более прямоугольны и одновременно шире чем в статических. Время переключения зависит так от напряженности поля, причем эта функция имеет вид $(H_m^3 - H_0^3)\tau = s$, как и от значения изменения магнетизации, зависящей от начального магнитного состояния материала испытуемого образца.

Эта функция представляется в виде $\tau = f(\sqrt{\Delta B_{np}})$ и является линейной для определенного диапазона неотвратимых изменений индукции ΔB_{np} Исследовались также изменения индукции вызванные реверсивными процессами намагничивания материала.

CONTRIBUTION TO INVESTIGATIONS ON THE MECHANISM OF MAGNETIZATION REVERSAL IN FERRITES

The paper presents the static and dynamic measurement results for ferrite core type $Mn_{0,556}$ $Mg_{0,608}$ $Fe_{1,845}O_4$.

On the ground of the static measurements, carried out by ballistic method, the family of asymmetric hysteresis loops for the material has been obtained. In the subsequent dynamic measurements, the core was submitted of the magnetic field in the form of bidirectional pulses.

To enable the comparison of results recorded for both measuring methods, the magnetization conditions have been chosen accordingly. In fact two series of the pulse measurements were performed. In the first series the amplitude of magnetizing pulse was varied at the determined initial remanent state of the specimen, whereas in the second — at the constant magnetizing field, the initial magnetic state of the core (remanent state) was varied through the variation of the amplitude of pulse of the opposite phase, forgoing the driving pulse.

The analysis of the recorded results proves, that the hysteresis loops obtained in conditions of dynamic magnetization are more rectangular, and, moreover, they are of wider shape than static. The switching time is dependent both on the field strenght of function shape $(H_m^3 - H_0^3)\tau = s$ and on the value of the magnetization change, stipulated by initial magnetic state of the material.

This dependence is expressed by $\tau = f(\sqrt{\Delta B_{np}})$ and it is linear within certain range of values of the irreversible changes of induction ΔB_{np}. The induction changes resulting from the reversible processes of the magnetization of material were examined as well.

ERRATA

Zeszyt 4/60, t. IX

Str.	Wiersz od góry	Wiersz od dołu	Jest	Powinno być
677	9		[1,3]	[1,4]
681	5		$\|-y$	$\|-y\|$
682	w podpisie pod rys. 6		nasycenia poporcji	nasycenia i proporcji
683	we wzorze (11b)		$=-3\mu_0 \frac{I^2 m}{a} k$	$=-\frac{3}{2} \mu_0 \frac{I^2 m}{a} k$
685	12		brak nawiasu	$(k'' - \ldots$
685	we wzorze (14)		$= -\mu_0 \ldots$	$= \mu_0 \ldots$
685	we wzorze (16)		$\ldots + \frac{\sqrt{3}}{2} \ldots$	$\ldots - \frac{\sqrt{3}}{2} \ldots$
685		1	$k'' - k'$	$k'' + k'$
687	4		$\frac{h}{2}$ i ...	$-\frac{h}{2}$ i ...
691	7		[1,3]	[1,4]
691		12	[1,3]	[1,4]
710	we wzorze (31)		$\frac{Im\{\hat{U}_{20}\}}{Re\{\hat{U}_{20}\}}$	$\left\| \frac{Im\{\hat{U}_{20}\}}{Re\{\hat{U}_{20}\}} \right\|$
712	2		$k \approx j2$	k $\approx$ j2

WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz w obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim, francuskim lub niemieckim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza odpowiednie streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednoczesnym wpisaniem, terminologii w języku rosyjskim oraz w innym języku obcym.
4. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
5. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń, jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.
6. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].
8. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w redakcji na własny koszt przy przesyłaniu korekty swej pracy.
9. Nie zastosowanie się Autora do powyższych wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych materiałów do wymaganej formy.

Uwaga: Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki", Warszawa, Koszykowa 75, Politechnika, Zakład Radiotechniki, tel. 8.32.04. Redakcja czynna w poniedziałki, środy i piątki

Cena zł 30,—

WARUNKI PRENUMERATY CZASOPISMA

„ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI" — KWARTALNIK

Cena w prenumeracie zł 100,— rocznie, zł 50,— półrocznie. Zamówienia i wpłaty przyjmują:

1. Przedsiębiorstwo Upowszechnienia Prasy i Książki „RUCH", Poznań, ul. Zwierzyniecka 9, konto PKO Nr 122-6-211.831.

2. Urzędy pocztowe.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę 40% drożej. Zamówienia dla zagranicy przyjmuje Przedsiębiorstwo Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych „RUCH", Warszawa, ul. Wilcza 46, konto PKO nr 1-6-100-024.

Bieżące numery do nabycia w księgarniach naukowych „Dom Książki" oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk — Wzorcownia Wydawnictw Naukowych PAN — Ossolineum — PWN, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter).

PLACÓWKI „RUCHU"

Białystok, Lipowa 1
Bielsko-Biała — sklep „Ruchu" nr 1, Lenina 7
Bydgoszcz, Armii Czerwonej 2
Bytom — sklep „Ruchu" nr 39, Plac Kościuszki
Chorzów, Wolności 54
Ciechocinek, kiosk nr 4, „Pod Grzybkiem"
Częstochowa, II Aleja 26
Gdańsk, Długa 44/45
Gdynia, Świętojańska 27
Gliwice, Zwycięstwa 47
Gniezno, Mieczysława 31
Grudziądz, Mickiewicza, sklep nr 5
Inowrocław, Marchlewskiego 3
Jelenia Góra, 1-go Maja 1
Kalisz, Śródmiejska 3
Katowice Zach., 3 Maja 28
Kielce, Sienkiewicza 22
Koszalin, Zwycięstwa 38
Kraków, Rynek Główny 32
Krynica, Stary Dom Zdrojowy
Lublin, Krakowskie Przedmieście (obok hotelu „Europa")
Łódź, Piotrkowska 200
Nowy Sącz, Jagiellońska 10
Olsztyn, Plac Wolności (kiosk)
Opole, Rynek — sklep nr 76
Ostrów Wlkp., Partyzancka 1
Płock, Tumska, kiosk nr 270
Poznań, Dzierżyńskiego 1
Poznań, Głogowska 66
Poznań, 27 Grudnia 4
Przemyśl, Plac Konstytucji 9
Rzeszów, Kościuszki 5
Sopot, Monte Cassino 32
Sosnowiec, Czerwonego Zagłębia, kiosk nr 18 (obok dworca kol.)
Szczecin, Aleja Piastów, róg Jagiellońskiej
Toruń, Rynek Staromiejski 9
Wałbrzych, Wysockiego, obok Placu Grunwaldzkiego
Warszawa, Nowopiękna 3
Warszawa, Nowy Świat 72, Pałac Staszica
Warszawa, Wiejska 14
Włocławek, Plac Wolności, róg 3 Maja
Wrocław, Plac Kościuszki, kiosk nr 9
Zabrze, Plac 24 Stycznia, pkt nr 50
Zakopane, Krupówki 51
Zielona Góra, Świerczewskiego 38

OŚRODEK ROZPOWSZECHNIANIA WYDAWNICTW NAUKOWYCH PAN

Wzorcownia Wydawnictw Naukowych

PAN — OSSOLINEUM — PWN, Warszawa

Pałac Kultury i Nauki — (wysoki parter)